

DIE DYNAMIK ZUSAMMENGESETZTER VEKTORFELDER

IN EINER SPINORTHEORIE

MIT FERMI-ARTIGEN KOPPLUNGEN

Jürgen Lauer

Disbui. München

1988



**DIE DYNAMIK ZUSAMMENGESETZTER VEKTORFELDER
IN EINER SPINORTHEORIE
MIT FERMI-ARTIGEN KOPPLUNGEN**

**Dissertation der Fakultät für Physik der
Ludwig-Maximilians-Universität München**

vorgelegt von

Jürgen Lauer aus Coburg

München, den 16. Juli 1987

1. Gutachter: Professor Dr. Dürr
2. Gutachter: Professor Dr. Salecker

Die mündliche Prüfung fand am 8. 2. 1988 statt.

Zusammenfassung

In eine eichinvariante Lagrangedichte für ein Spinorfeld, welches bei ultravioletten Impulsen die Skalendimension $\frac{1}{2}$ zeigt, wird eine Zwangsbedingung aufgenommen; diese enthält die Definition eines zusammengesetzten Vektorpotentials A_μ , das mit der Punkttrennungs-Methode gebildet wird. Bei den betrachteten Eichgruppen handelt es sich um $U(1)$ sowie $SU(2)$. Wir weisen darauf hin, daß sich die Gestalt des (subkanonischen) Fermion-Propagators deutlich ändert, wenn man zur 1-Schleifen-Näherung übergeht; dies beeinflusst wiederum das Eich-Transformationsverhalten von A_μ in unerwünschter Weise.

Da die Benutzung dieser zusammengesetzten Hilfsfelder eine bilineare Gestalt der Spinor-Lagrangedichte ermöglicht, kann die effektive Dynamik von A_μ sowie eines begleitenden Lagrange-Multiplikatorfelds geschlossen angegeben werden. Die Eichinvarianz des bosonischen Sektors wird ausführlich untersucht. Er enthält insbesondere kinetische Terme (Maxwell-Term bzw. Yang-Mills-Wirkung) für die bisherigen Hilfsfelder. Dies erlaubt den Austausch eines masselosen Photons in der Spinor-Spinor-Streuamplitude; die entsprechenden Diagramme des fundamentalen Spinormodells bestehen aus iterierten Schleifen vom Typ der Vakuumpolarisation. Bisher wurde angenommen, daß die beiden Massenskalen der Spinortheorie genügen, um die induzierte Kopplungskonstante zu bestimmen. Wir können diese Ansicht widerlegen, da der reine Eichfeldsektor noch eine divergente Amplitude (Vakuumpolarisation) enthält.

Die gemeinsamen Kopplungen von Eich- und Multiplikatorfeldern in der effektiven Yang-Mills-Theorie wurden bis zur Operatordimension 4 vollständig bestimmt. Vereinfachungen ergeben sich, wenn die anfangs eingeführten Massenskalen zueinander in einem hierarchischen Verhältnis stehen.

Endlich stellen wir die Möglichkeit vor, das Feld A_μ auch mit Hilfe des Impulsoperators aus den subkanonischen Spinoren zu gewinnen. Damit wird eine schon vorliegende Untersuchung anderer Autoren fortgesetzt, wobei insbesondere das Verfahren zur Pauli-Villars-Regularisierung und die Eichinvarianz der effektiven Dynamik im Mittelpunkt stehen.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555422_0036

INHALTSVERZEICHNIS

1. Einleitung	1
2. Feldtheorie mit nichtkanonischen Spinoren	6
2.1. Lagrangedichten für subkanonische Spinorfelder	6
2.2. Verwendung kanonischer Polfelder	17
2.3. Der subkanonische Propagator bei kleinem Abstand	19
2.4. Konstruktion eines zusammengesetzten $U(1)$ -Eichfeldes	22
2.5. Spinorselbstwechselwirkung mit lokaler $U(1)$ -Invarianz	24
2.6. 1-Schleifen-Korrektur des freien subkanonischen Propagators	28
3. Der Pfadintegralformalismus und die effektive Wirkung	33
3.1. Erzeugende Funktionale für die Green-Funktionen	33
3.2. Die effektive Wirkung Γ bis zur Ordnung $\hbar$	37
3.3. $\hbar$ -Quantenkorrektur der subkanonischen Wirkung mit Verbundfeld A^μ	41
4. Effektive Dynamik eines $U(1)$ -Eichfeldes aus subkanonischen Spinoren	45
4.1. Bestimmung der Wechselwirkungen in der 1-Schleifen-Näherung	45
4.1.1. Ausintegration der Spinorfreiheitsgrade	45
4.1.2. Die Regularisierung der effektiven Wirkung	48
4.1.3. Formaler Beweis der Eichinvarianz von S_{eff}	51
4.1.4. Kinetische Operatoren auf dem 1-Loop-Niveau	53
4.1.5. Höhere effektive Wechselwirkungen mit 4 äußeren Feldfaktoren	61
4.2. Diskussion der Feldgleichungen und Greenfunktionen	63
4.2.1. Klassische Feldgleichungen, Noetherstrom	63
4.2.2. Quellen für verschiedene (Produkt-) Operatoren	65
4.3. Die Spinor-Spinor-Streuamplitude aus Leiterdiagrammen	67
4.3.1. Dyson-Rekursionsformel	67
4.3.2. Masseloser Vektorteilchen-Austausch und effektive Kopplung bei schwacher Streuung	79

5. Zusammengesetztes $U(1)$ -Eichboson nach einem Vorschlag von Amati et al	86
5.1. Spinorlagrangedichte und Eichfelddefinition mittels des Ableitungs-Operators	86
5.2. Die effektive Wirkung der bosonischen Felder	88
5.2.1. Grassmann-Funktionalintegration; Eichinvarianz der effektiven Wirkung	88
5.2.2. Lorentzinvarianz und effektive Wechselwirkungen als 1-Loop-Amplituden	90
5.2.3. Sämtliche Diagramme mit bis zu zwei äußeren Feldern	93
5.2.4. Diskussion der induzierten kinetischen Operatoren	97
5.3. Änderung der Definition des Eichpotentials	100
6. Effektive Dynamik eines zusammengesetzten $SU(2)$ -Eichfeldtriplett	102
6.1. Yang-Mills-Eichfeld aus subkanonischen Spinoren	102
6.2. Erzeugendes Funktional der effektiven Yang-Mills-Theorie	104
6.2.1. Bilineare Terme in der Taylor-Entwicklung	105
6.2.2. Weitere Kopplungen aus dem reinen Eichsektor	107
6.3. Die Wechselwirkungen mit dem Multiplikatorfeld	111
6.3.1. Die Eichinvarianz legt die Struktur der Kopplungen fest	111
6.3.2. Die induzierte Wirkung zur Skalendimension 4	113
6.4. Ausgeprägte Hierarchie der beiden Massenskalen M, Λ	117
6.4.1. Subkanonische Propagatorketten mit ϕ_ν -Vertizes an beiden Enden	117
6.4.2. Die effektive Wirkung im asymptotischen Grenzfall	118
7. Ergänzung der effektiven Beschreibung durch Materie-Verbundfelder	123
7.1. Zusammengesetztes Skalarfeld und Diracfeld. Verschiedene Ansätze für die bilinearisierte subkanonische Wirkung	123
7.2. Effektive Lagrangedichten mit Materiefeldern	124
Anhang A. Zwei mögliche Formen der effektiven Wirkung in der subkanonischen Spinortheorie	128
Anhang B. Die Pauli-Villars-Regularisierung bei asymptotisch gleichen Regulatormassen	130
Anhang C. Untersuchung von Feynman-Amplituden	134

C.1. Ein verallgemeinertes Furry-Theorem	134
C.2. Transversalität und Form der effektiven Wechselwirkung	137
Anhang D. Feynman-Integration	139
D.1. Behandlung der euklidischen Raumwinkelintegration	139
D.2. Bestimmte Integrale mit rationalen Integranden	141
D.3. 1-Schleifen-Amplitude: Ableitungskopplungen als Vertizes	145
Anhang E. Kriterien für die Eichinvarianz der effektiven Wirkung	147
E.1. Lokale $U(1)$ -Invarianz	147
E.2. Lokale nichtabelsche Eichinvarianz	152
Anhang F. Nichtabelsche Eichtheorie	153
F.1. Die 1-Schleifen-Beiträge mit Operatoren der Dimension 6	153
F.2. Die funktionale Form der 1-Schleifen-Wirkung im Yang-Mills-Sektor	155

1. Einleitung

Für die Beschreibung der kleinsten Bestandteile der Materie und der Wechselwirkungen, die unter ihnen herrschen, wurde zu Beginn dieses Jahrhunderts die Quantenmechanik und darauf aufbauend die Quantenfeldtheorie entworfen. Der vorläufige Höhepunkt dieser Entwicklung war der Nachweis von schweren Partnerteilchen des Lichtquants (Photon), die als W-Boson bzw. Z-Boson bezeichnet werden, in einem Beschleunigerexperiment am CERN (Genf). Dadurch wurde die bereits in den sechziger Jahren aufgestellte Theorie zur Vereinheitlichung der elektromagnetischen mit der schwachen Wechselwirkung eindrucksvoll bestätigt. Sie wird nach ihren Vätern S. Glashow, A. Salam und S. Weinberg als GSW- Theorie bezeichnet. Sie besitzt eine lokale Eichinvarianz sowohl bezüglich der nicht-abelschen Gruppe $SU(2)$ als auch der 1-Parameter-Gruppe $U(1)$ der Phasentransformationen. Es muß allerdings eine spontane Symmetriebrechung zu einer $U(1)$ -Untergruppe $\subset SU(2) \times U(1)$ stattfinden, welche aus den vom Operator der elektrischen Ladung erzeugten Eichtransformationen besteht. Dabei kommt eine Massenskala $v \sim 250 \text{ GeV}$ ins Spiel, was zusammen mit dem Higgs-Kibble Mechanismus dazu führt, daß die geladenen W-Bosonen und das neutrale Z-Boson ihre vergleichsweise schweren Massen von $\sim 82 \text{ GeV}$ bzw. $\sim 93 \text{ GeV}$ annehmen. Diese Vorhersagen konnten durch die UA1- und die UA2-Kollaboration am CERN im Jahre 1983 experimentell nachgewiesen werden.

Inzwischen wird aus verschiedenen Gründen nach Feldtheorien gesucht, welche außerdem die starken Wechselwirkungen und die Gravitationserscheinungen beinhalten. Allgemein hält man die Anzahl der zunächst noch freien Parameter im GSW-Modell für zu hoch und unternimmt deshalb den Versuch, aus einem umfassenderen Modell Beziehungen unter ihnen abzuleiten. Ferner ist der skalare Sektor der GSW-Theorie mit dem postulierten Higgs-Teilchen aus theoretischer Sicht unbefriedigend.

Mehrere neue Ansätze versuchen etwa die Symmetriebrechung dynamisch herbeizuführen, den linkshändig koppelnden $SU(2)$ -Sektor der schwachen Wechselwirkung durch rechtshändige Kopplungen mit neuen Vektorbosonen zu ergänzen oder sogar die Leptonen- und Quark-Familien als aus noch kleineren Bausteinen zusammengesetzt zu betrachten. Eine Vereinheitlichung der GSW-Theorie mit der Quantenchromodynamik, die für die Erklärung der starken Wechselwirkung herangezogen wird, verlangt eine zusätzliche Symmetriebrechungsskala bei einer Energie von $\sim 10^{15} \text{ GeV}$. Die bekannten Teilchengenerationen lassen sich dann in $SU(5)$ - oder $SO(10)$ -Multipletts unterbringen. Schließlich hat man ausführlich Symmetrien untersucht, welche Fermionen in Bosonen überführen und gleichzeitig die Poincaré-Gruppe der Translationen und Lorentz-Transformationen erzeugen. Sie tragen den Namen Supersymmetrien. Die Ausdehnung dieser Transformationsgruppe auf eine Supergravitation genannte Eichtheorie schließt schon die Allgemeine Relativitätstheorie mit ein.

In den letzten Jahren hat auch das theoretische Interesse an den (Super-) String-Theorien stark zugenommen. Sie beruhen auf der Quantenmechanik für einen String genannten Faden, der sich in einer hochdimensionalen Raum-Zeit bewegt. Von der feldtheoretischen Approximation einer solchen darüber hinaus mit einer lokalen Supersymmetrie ausgestatteten String-Theorie erhofft

man sich endliche Streumatrix-Elemente. Da dieser Grenzfall eine 10-dimensionale Raum-Zeit verlangt, muß mit einer anschließenden Kompaktifizierung von 6 räumlichen Dimensionen noch zur von uns erlebten 4-dimensionalen Minkowskischen Raum-Zeit übergegangen werden. Viele Probleme in diesem Gebiet sind zur Zeit noch ohne Antwort. Ob die vorgeschlagenen Feld- bzw. Stringtheorien in der Natur verwirklicht sind, wird vermutlich erst mit der neuen Generation von Beschleunigeranlagen ernsthaft untersucht werden können, bei denen Schwerpunktsystem-Energien von $\sim 1 \text{ TeV}$ frei werden.

Um die bekannten Naturkräfte durch eine einzige Theorie zu erhalten, wurde auch versucht, aus genau einem Spinor-Multiplett auf der üblichen flachen Raum-Zeit-Struktur alle bekannten, elementar erscheinenden Bosonen und Fermionen mit geeigneten Operator-Produkten zu konstruieren. Wenn man darauf verzichtet, Zwangsbedingungen an die fundamentalen Spinoren zu stellen, dann ist man auf nicht-kanonische Fermionfelder angewiesen, welche unter einer Dilatation den Homogenitätsgrad $(-1/2)$ zeigen. Es zeigt sich, daß Spinoren dieser Art keine Wahrscheinlichkeitsdeutung zulassen, weil notwendig Geistfelder auftreten und dadurch die Positivität der Zustandsmetrik verloren geht (bei anderen Verfahren gerät man in ähnliche Schwierigkeiten). Also ist auch eine physikalische Teilchen-Interpretation der Komponenten des Spinor-Multipletts unmöglich. Bestenfalls findet man einen positiv definiten Teilraum, in welchem einige Operatorprodukte dieser Spinoren die physikalischen Eigenschaften von Elementarteilchen besitzen.

Eine ausführliche Untersuchung der eben erwähnten Modelle wurde durch die Gruppe um W. Heisenberg ab 1953 begonnen. Die Dynamik des fundamentalen Spinorfeldes wurde dabei als Feldgleichung eines Weyl-Spinors mit Isospinindex angegeben, wobei auch ein nichtlinearer Term eingeht, der einer Fermi-Wechselwirkung der Spinoren entspricht. Die Kopplungskonstante war von der Form " $(\text{Länge})^2$ "; bei phänomenologischen Anwendungen auf Nukleonen und Mesonen hatte man als charakteristische Längenskala den Protonradius einzusetzen. Zum raschen Fortschritt im theoretischen Verständnis des Elementarteilchen-Zoo in den sechziger Jahren haben diese nichtlinearen Spinor-Modelle nicht beigetragen.

Einige Erweiterungen im Modell wurden während der siebziger Jahre besonders von H.-P. Dürr und H. Saller vorgenommen. Mit der Konstruktion eines $U(1)$ -Vektorpotentials als ein Spinorprodukt war es möglich, eine Verbindung zur Eichtheorie des Elektromagnetismus herzustellen. Außerdem nahm man eine Ausdehnung der Symmetriegruppe des Spinor-Multipletts unter Ein-schluß der Reparametrisierungs-Invarianz vor und ging zu einer neuen Skala $M_{\text{Planck}} \sim 10^{19} \text{ GeV}$ über, bei welcher die Dynamik nur noch durch die nichtkanonischen Felder ausgedrückt werden kann. Auf dieser Grundlage wird versucht, näherungsweise eine effektive Lagrangedichte der Verbundfelder zu berechnen, welche die wichtigen Merkmale der elektroschwachen und der starken Wechselwirkung sowie der Allgemeinen Relativitätstheorie aufweist.

In der folgenden Arbeit werden Vektorfelder besprochen, die sich als bilineare Ausdrücke in den nichtkanonischen Spinorfeldern darstellen lassen. Sie bewirken eine Linearisierung des Selbstwechselwirkungsterms der Spinor-Lagrangedichte; technisch wird dies dadurch erreicht, daß man in die Wirkung des Spinormodells eine Lagrangemultiplikator-Bedingung aufnimmt, worin die

Definition der Vektorfelder als Operatorprodukt aus nichtkanonischen Spinoren eingeht. Die effektiven Wechselwirkungen für diese Verbundfelder werden daraufhin durch Quantenfluktuationen verursacht.

Im dritten Kapitel stellen wir den Zusammenhang zwischen der dafür verantwortlichen effektiven Lagrangedichte und dem in der Feldtheorie oft verwendeten erzeugenden Funktional aller 1-Teilchen-irreduziblen Green-Funktionen her; dieses wird auch effektive Wirkung genannt, darf aber nicht mit der von uns benutzten effektiven Lagrangedichte verwechselt werden. Vielmehr weisen wir nach, daß alleine dessen bosonischer Sektor und daraus auch nur die Terme erster Ordnung in $\hbar$ die effektive Dynamik bestimmen. Bei diesem Vergleich müssen wir noch berücksichtigen, daß anstelle der c -Zahl-Felder des erzeugenden Funktionalns nun Quantenoperatoren treten. Der Formalismus des Feynman-Pfadintegrals hilft uns, eine geschlossene Darstellung der effektiven Lagrangedichte zu geben.

Zum Funktional der effektiven Wirkung gehören auch Diagramme mit äußeren Spinorfeldern; wir stellen einen deutlichen Einfluß der Selbstenergiekorrektur auf die Form des freien subkanonischen Propagators fest. Damit wird sichtbar, daß trotz des subkanonischen Feldes manchmal auf eine zusätzliche Regularisierung nicht verzichtet werden kann.

Das zusammengesetzte $U(1)$ -Vektorpotential wird nach dem Punkttrennungsverfahren konstruiert, so daß es sich in der gewohnten Weise inhomogen transformiert, falls eine Umzeichnung der spinoriellen Konstituenten vorgenommen wird. Desgleichen gelangt man auch zu Verbundfeldern, welche sich wie Yang-Mills-Potentiale verhalten. In dieser Arbeit beschäftigen wir uns besonders mit einem zusammengesetzten $SU(2)$ -Eichfeldtriplett. Dabei benutzen wir ein Dublett aus Basisspinoren, welches sich nach der Fundamentaldarstellung von $SU(2)$ transformiert. Die effektive Wirkung hat jeweils die Form einer Reihe, deren Glieder die durch den Spinor-Loop erzeugten Kopplungen zwischen mehreren Vektor- und Multiplikatorfeldern sind. Falls die Feynman-Integrale über den 4-dimensionalen Schleifenimpuls divergieren, ist eine Regularisierung erforderlich; um eine mögliche Eichinvarianz der effektiven Theorie unter der unitären Gruppe $U(1)$ oder $SU(2)$ nicht zu beeinträchtigen, stützen wir uns in solchen Fällen auf das von Pauli und Villars angegebene Verfahren. Die enge Verbindung zwischen der Punkttrennungs-Regularisierung des Verbundfeldes, welche ebenfalls für endliche 1-Loop-Amplituden sorgt, und der Eichinvarianz der effektiven Wirkung, wird besonders unterstrichen.

Insbesondere erhält man effektive kinetische Terme für die zusammengesetzten Vektorfelder, die in der Baumgraphen-Näherung des Spinormodells noch nicht auftraten. Im $U(1)$ -Fall handelt es sich um eine Maxwell-Lagrangedichte, während der nichtabelsche $SU(2)$ -Fall zu einer Yang-Mills-Wirkung führt. Damit erwerben die bosonischen Hilfs-Vektorfelder einen eigenen nichttrivialen Propagator; mehrfach hängen die Kopplungsstärken an geladene Materiefelder von zusätzlichen Abschneideparametern ab und können daher innerhalb des verwendeten Spinormodells noch nicht berechnet werden.

Auch auf den gemischten Sektor mit gemeinsamen Wechselwirkungen von Vektor- und Multiplikatorfeldern gehen wir ausführlich ein. Dabei stehen Fragen nach der Eichinvarianz der in-



duzierten Kopplungen im Vordergrund. Ein dritter Sektor trägt nur äußere Beine des Multiplikatorfelds an den Vertizes seiner 1-Loop-Diagramme. Sein Einfluß auf die Phänomenologie des Niederenergieverhaltens der effektiven Theorie wird abgeschätzt. Wir kennzeichnen die effektive Theorie durch einen Vergleich mit der Spinor-Spinor-Streuamplitude, die wir für unser subkanonisches Modell untersucht haben. Falls man den Austauschgraphen nur aus Diagrammen aufbaut, welche die Gestalt einer Leiter besitzen, wird genau die Eichfeld-Dynamik der effektiven Theorie wiedergegeben. Diese Methode erlaubt eine sichere und einfache Bestimmung der induzierten Kopplungskonstante des $U(1)$ -Vektorpotentials. Allerdings tritt ein Widerspruch zu Ergebnissen auf, die Dürr und Saller in früheren Arbeiten fanden (vgl. [1], [2]). Dort wurde der Standpunkt vertreten, daß in der effektiven Dynamik das Multiplikatorfeld weiterhin die Bedeutung des Teilchenstromes besitzt. Wir können jedoch nachweisen, daß die Argumentation in [2], welche sich auf die Bethe-Salpeter-Gleichung stützt, die Verhältnisse zu vereinfacht darstellt und einen Fehler enthält. Nach seiner Verbesserung liefern beide Untersuchungen übereinstimmende Werte für die Sommerfeld-Feinstrukturkonstante.

Innerhalb der effektiven Yang-Mills-Dynamik wurde schließlich auch der Sonderfall betrachtet, daß die charakteristischen Massenskalen der fundamentalen Spinortheorie weit auseinanderliegen. Die Unterschiede zwischen dem reinen Eichsektor und dem gemischten Sektor treten dann zurück; dies geht aus einer Untersuchung der betreffenden Spinor-Propagatorketten hervor. Dann zeichnen sich auch für das Multiplikatorfeld eichkovariante Kopplungen ab.

Während bisher von Vektorfeldern die Rede war, die als Bindungssysteme nichtkanonischer Spinorfelder angesehen werden können, liegen auch Arbeiten vor, in denen ein nichtlineares Modell mit Spinoren ψ der Dimension $3/2$ betrachtet wird (siehe etwa [3], [4]). Unter der Bedingung, daß das Skalarprodukt $\bar{\psi} \cdot \psi$ nirgends verschwinden soll, gelingt auch in diesen Fällen die Konstruktion einer effektiven Theorie für Verbund-Vektorfelder und die begleitenden Multiplikatoren. Etwas verwickeltere Transformationsregeln erlauben auch hier, von einer $U(1)$ -Eichinvarianz des bosonischen Sektors zu sprechen. Nachdem sämtliche (bilinearen) kinetischen Terme bis zur Ordnung $\hbar$ ermittelt wurden, überlegen wir noch, ob eine neue Definition des Verbund-Vektorfelds bereits mit den gewöhnlichen Umeichungs-Regeln auskommt. Unsere Ergebnisse weichen zum Teil von den Behauptungen der oben angesprochenen Veröffentlichungen ab.

In einem weiteren Abschnitt werden die effektiven Wirkungen von Materie-Verbundfeldern betrachtet. Dabei handelt es sich um ein zusammengesetztes reelles Skalarfeld sowie um ein Fermionfeld, die als Operatorprodukte des subkanonischen Spinorfelds definiert sind. In allen Fällen wurden bilineare Konstruktionen gewählt, weshalb die fundamentalen Spinormoden wieder geschlossen ausintegriert werden können. Wir besitzen jetzt ein Testgelände, wo wir die universelle Gültigkeit der gewonnenen effektiven Kopplungskonstante überprüfen können.

Längere Rechenschritte, die die Lesbarkeit der Kapitel im Hauptteil erschweren würden, sind in die einzelnen Anhänge ausgegliedert worden. Unter anderem behandeln wir die Pauli-Villars-Regularisierung, wenn der Grenzfall asymptotisch gleicher Regulatoren vorliegt. Dann wird das Furry-Theorem für unsere Zwecke erweitert. Feynman-Amplituden zerlegen wir nach einer Wick-

Rotation in ein Raumwinkelintegral sowie ein Radialintegral; die jeweilige Auswertung besprechen wir im Détail. Ein Feynman-Diagramm mit einer Ableitungskopplung am Vertex wird anschließend in einem Beispiel erläutert. Wir begründen außerdem ein einfaches Kriterium, womit sich die Eichinvarianz der effektiven Wirkung bestätigen läßt. Schließlich erklären wir, warum es keine Einschränkung bedeutet, die effektiven Wechselwirkungen zuerst für den einfachen Sonderfall konstanter äußerer Felder zu berechnen. Man hat trotzdem noch die Möglichkeit, das Ergebnis sofort auf Raum-Zeit-veränderliche Variable auszudehnen. Als Beispiel dient der 1-Schleifen-Beitrag mit Operatoren der Dimension 6.

2. Feldtheorie mit nichtkanonischen Spinoren

2.1. LAGRANGEDICHTEN FÜR SUBKANONISCHE SPINORFELDER

Die Lagrangedichte für freie Elektronen und Positronen geht auf Dirac zurück. Erzeugung und Vernichtung dieser Teilchen werden mit der Methode der zweiten Quantisierung durch einen Feldoperator ψ^α und das hermitesch konjugierte Feld $(\psi^\dagger)^\alpha$ ausgedrückt, welche auf die Zustände des Fock-Raumes wirken. ψ^α ist ein 4-komponentiger komplexwertiger Spinoroperator und erfüllt die Dirac-Gleichung:^[1]

$$(i\partial - m)\psi = 0 \quad (2.1)$$

m bezeichnet darin die physikalische Elektronenmasse. $\partial = \gamma^\alpha \cdot \partial_\alpha$ ist ein partieller Differentialoperator erster Ordnung. Im Folgenden verwenden wir die Minkowski-Metrik $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$; $\mu, \nu \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Die 4-dimensionalen Matrix-Koeffizienten γ^α bilden eine Darstellung der Clifford-Algebra:

$$\{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\} = 2g^{\alpha\beta} \cdot 1 \quad (2.2)$$

Die Feldgleichung (1) ist die Euler-Lagrangegleichung zur Wirkung $S = \int d^4x \mathcal{L}$ mit

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial - m)\psi \quad (2.3)$$

Mit $\bar{\psi} = \psi^\dagger \cdot \gamma^0$ bezeichnen wir das adjungierte Spinorfeld. S ist invariant gegenüber einer Lorentz-Transformation; dabei transformiert sich ψ nach der Spin-(1/2)-Darstellung von $SO(3, 1)$.

ψ läßt sich als Superposition ebener Wellen-Lösungen der Dirac-Gleichung (1) schreiben:

$$\psi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{k^0} \sum_{\alpha=1}^2 (b_{(\alpha)}(k) u_{(\alpha)}(k) e^{-ikx} + d_{\alpha}^\dagger(k) v_{(\alpha)}(k) e^{ikx}) \quad (2.4)$$

$(m > 0)$

Implizit gilt hier die relativistische Energie-Impuls-Beziehung

$$k_0 = \sqrt{m^2 + \vec{k}^2} \quad (2.5)$$

$u_{(\alpha)}(k), v_{(\alpha)}(k)$ sind 4-komponentige Spinoren, die im Impulsraum die algebraischen Wellengleichungen

$$(\not{k} - m)u_{(\alpha)}(p) = 0 \quad (2.6a)$$

$$(\not{k} + m)v_{(\alpha)}(p) = 0 \quad (2.6b)$$

^[1]Wir vereinbaren von nun an Einheiten, so daß $\hbar = c = 1$ gilt.

erfüllen. Die Normierung dieser Spinoren ist so gewählt, daß die anschließenden Beziehungen gelten [5]:

$$\begin{aligned}\bar{u}_{(\alpha)}(k)u_{(\beta)}(k) &= \delta_{\alpha\beta}, & \bar{v}_{(\alpha)}(k)v_{(\beta)}(k) &= -\delta_{\alpha\beta} \\ \bar{u}_{(\alpha)}(k)v_{(\beta)}(k) &= 0, & \bar{v}_{(\alpha)}(k)u_{(\beta)}(k) &= 0\end{aligned}\quad (2.7)$$

(Das Minuszeichen kommt durch den Übergang $v_{(\alpha)}(k) = \gamma_5 \cdot u_{(\alpha)}(k)$ zustande) Schließlich handelt es sich bei $b_\alpha(k)$, $d_\alpha^\dagger(k)$ um Operator-wertige Amplituden^[2] (Vernichtungsoperator für Lösungen zu positiver Energie bzw. Erzeugungsoperator zu Lösungen negativer Energie), die untereinander eine Antikommutator-Algebra bilden:

$$\{b_\alpha(k), b_\beta^\dagger(q)\} = \delta_{\alpha\beta} \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{q}) (2\pi)^3 \frac{k^0}{m} \quad (m > 0) \quad (2.8a)$$

$$\{d_\alpha(k), d_\beta^\dagger(q)\} = \delta_{\alpha\beta} \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{q}) (2\pi)^3 \frac{k^0}{m} \quad (m > 0) \quad (2.8b)$$

(während alle übrigen Klammersymbole $\{, \}$ den Wert 0 annehmen). Mit dieser Vorschrift erreicht man nämlich, daß der Gesamt-4-Impuls P^μ des Dirac-Feldes ψ als Generator infinitesimaler globaler Translationen wirkt. Er hängt von dem (unsymmetrischen) Energie-Impuls-Tensor $\Theta^{\mu\nu}$ wie folgt ab:

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \vec{\sigma}^\nu \psi \quad (2.9a)$$

$$P^\nu = \int d^3x \Theta^{0\nu} = \frac{i}{2} \int d^3x \psi^\dagger \vec{\sigma}^\nu \psi \quad (2.9b)$$

Wenn man die Darstellung (4) in (9b) einsetzt und eine Normalordnung ausführt, dann ergibt sich P^μ als ein positiv definiter Operator, der diagonal in der Teilchenzahldarstellung ist:

$$P^\nu = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{k^0} k^\nu \sum_{\alpha=1}^2 (b_\alpha^\dagger(k) b_\alpha(k) + d_\alpha^\dagger(k) d_\alpha(k)) \quad (2.10)$$

Die kanonische Quantisierung des Fermionfeldes ψ wird aus (8a-b) durch die Antikommutatorbedingung

$$\{\psi_{(\alpha)}(\vec{x}, t), \psi_{(\beta)}^\dagger(\vec{y}, t)\} = \delta_{\alpha\beta} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \quad (2.11)$$

zu gleichen Zeiten erhalten. Das zeitgeordnete Produkt zweier Diracfelder $\psi, \bar{\psi}$ lautet dann:

$$\langle 0 | T \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) | 0 \rangle = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-y)}}{\not{p} - m + i\epsilon} =: S(x-y) \quad (2.12)$$

Dieser Propagator genügt also der inhomogenen Wellengleichung:

$$(i\vec{\partial}_x - m)S(x-y) = i\delta^{(4)}(x-y) \quad (2.13)$$

^[2]der in Klammern gesetzte Index bedeutet den Eigenzustand bezüglich der z-Komponente des Spinoperators $\frac{1}{2}\sigma_3$.

Unter einer Dilatation der Raum-Zeit

$$x^\alpha \mapsto x'^\alpha = \frac{1}{\lambda} \cdot x^\alpha \quad (\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \quad (2.14)$$

bleibt die masselose 2-Punkt-Greenfunktion (12) offenbar forminvariant, wenn das Transformationsgesetz

$$\psi^\alpha(x) \mapsto \psi'^\alpha(x') = \lambda^{3/2} \psi^\alpha(x) \quad (2.15)$$

besteht. Der Exponent von λ im Skalierungsgesetz (hier $3/2$) gibt die (Energie-)Dimension des betreffenden Feldes an. Zwar zerstört der Massenterm in (3) die Invarianz der Wirkung S unter den Transformationen (14) und (15), jedoch ist sein Einfluß bei hohen Impulsen $|p^2| \gg m^2$ vernachlässigbar.

In den kommenden Abschnitten werden wir der Frage nachgehen, ob die Felder, welche in den bekannten, phänomenologisch erfolgreichen Eichtheorien auftreten, mit Hilfe eines Fermion-Multipletts allein zusammengesetzt werden können.^[3] Wir nennen nun einige Einschränkungen, die bei der Bildung dieser "Verbundfelder" beachtet werden sollen. Zunächst lassen wir lediglich Polynome in den Komponenten des grundlegenden Fermion-Multipletts zu und verzichten auch auf weitere Zwangsbedingungen für die fermionischen Moden, wie z. B. nichtverschwindende Vakuum-Erwartungswerte. Außerdem geben wir vor, daß auch die partiellen Ableitungen ∂_σ nur in Form von Polynomen auftreten. Dieser Ableitungsoperator besitzt offensichtlich die Skalendimension 1. Bezeichnet man mit δ die Dimension des fundamentalen Spinorfeldes bei sehr kleinen relativen Abständen, dann folgt als Dimension der möglichen nichttrivialen Operatorprodukte aus diesen Spinorkomponenten zumindest der Wert $\min(\delta + 1, 2\delta)$; wir haben absichtlich die Möglichkeit nichtkanonischer Spinorfelder mit $\delta \neq 3/2$ (vgl. (15)) zugelassen.

Der Versuch, das QED-Vektorpotential A^μ mit der freien Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \quad (2.16)$$

aus unserem Spinorfeld zusammenzusetzen, erfordert, daß die oben genannte untere Dimensionsschranke nicht höher als $\delta = 1/2$ ausfällt: denn die Wirkung zu (16) bleibt dilatationsinvariant, falls sich A^μ als Feld mit der Dimension 1 verhält.

Aus diesem Grund befassen wir uns nun ausführlich mit subkanonischen Spinorfeldern $\tilde{\chi}$ der Dimension $1/2$, mit deren Monomen zweiten Grades die Konstruktion eines zusammengesetzten QED-Vektorpotentials möglich wird.

Eine freie Lagrangedichte für ein solches nichtkanonisches Feld — abgesehen von Massentermen — ist etwa:

$$\mathcal{L} = \bar{\tilde{\chi}}(i\partial)(-i\partial)^2\tilde{\chi} \quad (2.17)$$

^[3]Diese Konstruktion wird ähnlich wie die Operatorproduktentwicklung bei kurzen Abständen der beteiligten Spinorfelder vorgenommen.

(die besondere Wahl des Vorzeichens wird in Kürze begründet). Wir brechen die Skaleninvarianz der zugehörigen Wirkung, indem wir Massenparameter im kinetischen Operator K auftreten lassen. Dieser kann als Polynom dritten Grades in $(i \cdot \partial)$ wie folgt in Linearfaktoren zerlegt werden:

$$K(i\partial) = -(i\partial - m_1)(i\partial - m_2)(i\partial - m_3) \quad (2.18a)$$

oder gemäß

$$K(i\partial) = -(i\partial - m_1)(i\partial - m_2 - i \cdot m_3)(i\partial - m_2 + i \cdot m_3) \quad (2.18b)$$

Dabei sind m_1, m_2, m_3 reelle Parameter; zusätzlich soll in (18b) $m_3 \neq 0$ gelten. Unter diesen Voraussetzungen bleibt die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \bar{\chi} K(i\partial) \chi \quad (2.19)$$

nämlich selbstadjungiert.

Im Falle von (18a) wollen wir die Quantisierung des subkanonischen Feldes χ besprechen. Die Ausdehnung des kanonischen Formalismus auf Wirkungen mit höheren als zweiten Ableitungen der beteiligten Felder wurde bereits in [6] vorgenommen. Die Variation der Wirkung liefert als Euler-Lagrange-Feldgleichung für χ sofort:

$$-(i\partial - m_1)(i\partial - m_2)(i\partial - m_3)\chi = 0 \quad (2.20)$$

Wir nehmen zunächst an, daß sämtliche Massenparameter m_i untereinander verschieden sind; allgemein bezeichnen wir einen Spinor mit der Fourierzerlegung (4) mit ψ_i , wobei der Spektralindex i auf die Ruhemasse m_i aus der zugeordneten Dirac-Gleichung (1) hinweist.^[4] Selbstverständlich tragen die einzelnen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $d_\alpha^\dagger(k)$, $b_\alpha(k)$ nun ebenfalls den Index $i \in \{1, 2, 3\}$.

Offenbar erfüllt der gesuchte Dirac-Spinor $\chi(x)$ eine inhomogene partielle Differentialgleichung

$$(i\partial - m_2)(i\partial - m_3)\chi = \psi_1 \cdot (m_1 - m_2)(m_1 - m_3) \quad (2.21)$$

worin wir die Fourier-Amplituden $b_\alpha^1(k)$, $d_\alpha^{1\dagger}(k)$ als beliebig vorgegeben betrachten.

Mit der Greenschen Methode finden wir folgende allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} (i\partial - m_3)\chi(x) &= \psi_2(x) \cdot (m_2 - m_3) \\ &+ \int d^4y \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-y)}}{p - m_2 + i\epsilon} \psi_1(y) \cdot (m_1 - m_2)(m_1 - m_3) \\ &= \psi_2(x) \cdot (m_2 - m_3) + \psi_1(x) \cdot (m_1 - m_3) \end{aligned} \quad (2.22)$$

[4] Wenn m_i negativ ist, ersetzen wir diesen Parameter sowohl in (4) als auch in (8) durch seinen Absolutbetrag.

Die Wiederholung des eben erläuterten Schrittes führt dann auf:

$$\tilde{\chi}(x) = \sum_{i=1}^3 \psi_i(x) \quad (2.23)$$

(Falls eines der m_i negativ sein sollte, vertauschen die normierten Spinoren $u_\alpha^i(k)$, $v_\alpha^i(k)$ lediglich ihre Bedeutung).

Den Entartungsfall $m_1 = m_2 \neq m_3$ streifen wir nur kurz, weil hierbei zusätzlich unbeschränkte Lösungen der Feldgleichung auftreten, die physikalisch nicht sinnvoll sind. Im wesentlichen begegnet man dieser Erscheinung bereits bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen. Wir verzichten darauf, die allgemeine Lösung anzugeben, und nennen nur:

$$\tilde{\chi}(x) = x^\sigma \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \psi_1(x) + \psi_1(x) + \psi_3(x) \quad (2.24)$$

Auf den Fall (18b) gehen wir nur kurz ein. Falls $m_2 = 0$ gesetzt wird, sind nichttriviale Spinorlösungen auf dem Hyperboloid $p^2 = -m_3^2 < 0$ im Impulsraum vorhanden. Dieses Dispersionsgesetz beschreibt jedoch Tachyonen, die sich in allen Inertialsystemen mit Überlichtgeschwindigkeit bewegen.

Wir kehren zur Feldgleichung des Typs (18a) zurück und stellen insbesondere fest, daß bei nichtidentischen Massenparametern m_i das subkanonische Spinorfeld $\tilde{\chi}$ als Superposition (23) geschrieben werden kann. Die zweite Quantisierung der ψ_i soll so ausgeführt werden, daß der aus der Lagrangedichte (19) nach dem Noether-Theorem gewonnene Gesamt-4-Impulsoperator P^μ als Generator konstanter Translationen dient. Wir halten uns also an dieselben Prinzipien, die bei der kanonischen Quantisierung des Dirac-Feldes bereits benutzt wurden. Das kanonische Transformationsgesetz lautet:

$$\begin{aligned} \psi(x+a) &= e^{iPa} \psi(x) e^{-iPa} \\ \partial_\mu \psi &= i[P_\mu, \psi] \end{aligned} \quad (2.25)$$

Zunächst ermitteln wir den erhaltenen Energie-Impuls-Tensor $\tilde{\Theta}^{\mu\nu}$, welcher zur translationsinvarianten Lagrangedichte (19) gehört. Dazu variiert man die auf ein endliches Raum-Zeit-Volumen eingeschränkte Wirkung:

$$\delta \int_B d^4x \bar{\chi} K(i\partial) \tilde{\chi} = \int_{\partial B} d\sigma^\mu \delta x_\mu \mathcal{L} + \int_B d^4x (\delta \bar{\chi} K(i\partial) \tilde{\chi} + \bar{\chi} K(i\partial) \delta \tilde{\chi}) \quad (2.26)$$

Unter Translationen zum Parameter a^μ gilt für die Variation der Koordinaten und des subkanonischen Spinorfeldes im Einzelnen:

$$\begin{aligned} \delta x^\mu &= a^\mu \\ \delta \tilde{\chi}(x) &= \tilde{\tilde{\chi}}(x) - \tilde{\chi}(x) = -a^\mu \partial_\mu \tilde{\chi}(x) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Man entwickelt nun den kinetischen Operator K aus (18a) nach Potenzen des Ableitungsoperators $(i\partial)$:

$$K = -(i\partial)^3 + c \cdot (i\partial)^2 - d \cdot (i\partial) + e$$

$$\text{mit } \begin{cases} c = m_1 + m_2 + m_3 \\ d = m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_3 m_1 \\ e = m_1 m_2 m_3 \end{cases} \quad (2.28)$$

um in (26) durch mehrfache partielle Integration sowohl ein Randintegral als auch ein Volumenintegral über den Bereich B zu erhalten. Letzteres spielt aber keine Rolle mehr, weil der Integrand die Eulerschen Feldgleichungen als Faktor enthält:

$$\begin{aligned} \delta \left(\int_B \mathcal{L} d^4 x \right) &= \int_B d^4 x (\delta \bar{\chi} K(i\partial) \bar{\chi} + \bar{\chi} K(i\partial) \delta \chi) \\ &+ \int_{\partial B} d\sigma^\mu \{ a_\mu \mathcal{L} + i a^\nu \bar{\chi} \gamma_\mu \bar{\chi}_{,\nu} \cdot d \\ &- a^\nu \bar{\chi} (i \gamma_\mu i\partial + i\partial i \gamma_\mu) \bar{\chi}_{,\nu} \cdot c \\ &+ a^\nu \bar{\chi} (i \gamma^\mu i\partial i\partial + i\partial i \gamma^\mu i\partial + i\partial i\partial i \gamma^\mu) \bar{\chi}_{,\nu} \} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Wegen der beliebigen Gestalt des Volumens B können wir jetzt dem Randintegral den erhaltenen Energie-Impulstensor entnehmen:^[5]

$$\begin{aligned} \dot{\Theta}^{\mu\nu} &= -g^{\mu\nu} \mathcal{L} + \bar{\chi} (-\{i\gamma^\mu (i\partial)^2 + i\partial i\gamma^\mu i\partial + (i\partial)^2 i\gamma^\mu\} \\ &+ c\{i\gamma^\mu i\partial + i\partial i\gamma^\mu\} - d \cdot i\gamma^\mu) \bar{\chi}_{,\nu} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Es kommt zu starken Vereinfachungen, wenn wir die in (23) angegebene Spektralzerlegung des subkanonischen Spinorfeldes übernehmen und beachten, daß die Diracfelder ψ_i die Masseneigenwerte m_i besitzen:

$$\begin{aligned} \dot{\Theta}^{\mu\nu} &= -g^{\mu\nu} \cdot 0 + \sum_{i,j} \bar{\psi}_i (-i\gamma^\mu (m_j^2 + m_j m_i + m_i^2) \\ &+ c(i\gamma^\mu)(m_i + m_j) - d(i\gamma^\mu)) \psi_j^\nu \end{aligned} \quad (2.31)$$

Infolge der Identität

$$\begin{aligned} m_i^2 + m_j^2 + m_i m_j - c(m_i + m_j) + d &= \\ \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3 - m_i - m_j)^2 - \frac{1}{2}(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 - m_i^2 - m_j^2) \end{aligned} \quad (2.32)$$

verschwinden alle im Massen-Index i nichtdiagonalen Beiträge aus (31) und der gesuchte Gesamt-4-Impuls $P^\mu = \int d^3 x \dot{\Theta}^{0\mu}$ wird zu

$$P^\mu = i \sum_j \int d^3 x \bar{\psi}_j \gamma^0 \partial^\mu \psi_j \cdot w_j \quad (2.33)$$

^[5]Der Energie-Impulstensor ist nicht eindeutig: zu $\mathcal{L}$ darf eine totale Divergenz addiert werden; dies verändert $\dot{\Theta}^{\mu\nu}$.

mit

$$w_i = -(3m_i^2 - 2c \cdot m_i + d) \quad (2.34)$$

Die Koeffizienten-Paare (m_i, w_i) hängen wegen (28) offenbar wie folgt mit dem kinetischen Operatorpolynom $K(x)$ zusammen:

$$\begin{aligned} K(m_i) &= 0 \\ (dK(x)/dx)|_{x=m_i} &= w_i = \lim_{x \rightarrow m_i} K(x)/(x - m_i) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{w_i} = \text{Res} \frac{1}{K(x)}|_{x=m_i} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Als Ergebnis halten wir fest, daß der 4-Impuls für das freie subkanonische Feld $\tilde{\chi}$ sich als gewichtete Summe der einzelnen Lorentz-Impulsvektoren zu den kanonischen Diracfeldern ψ_i aus (23) darstellen läßt. Wir verlangen nun, daß (33) eine Translation des nichtkanonischen Feldes $\tilde{\chi}$ erzeugt, wie sie durch (25) beschrieben wird:

$$\sum_{i=1}^3 \partial_\mu \psi_i = i \sum_{j,k} \left[\int d^3x \psi_j^\dagger (i\partial_\mu) \psi_j \cdot w_j, \psi_k \right] \quad (2.36)$$

Ein Blick auf die kanonischen Antikommutatoren in (8a-b), die die Generator-Eigenschaft des kanonischen 4-Impulses aus (9) ermöglichen, zeigt sofort, mit welchen Bedingungen wir (36) erfüllen können:

$$\{b_\alpha^i(k), b_\beta^{j\dagger}(q)\} = \delta^{ij} \delta_{\alpha\beta} (2\pi)^3 \frac{k^0}{|m_i|} \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{q}) \cdot \frac{1}{w_i} \quad (2.37a)$$

$$\{d_\alpha^i(k), d_\beta^{j\dagger}(q)\} = \delta^{ij} \delta_{\alpha\beta} (2\pi)^3 \frac{k^0}{|m_i|} \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{q}) \cdot \frac{1}{w_i} \quad (2.37b)$$

Alle anderen Antikommutatoren dieser Algebra — insbesondere jene, die nicht im Spektral-Index i diagonal sind — sollen hingegen verschwinden. In der obigen Gleichung wurde vorausgesetzt, daß keines der Diracfelder ψ_i masselos ist (sonst hätte man neue Normierungen zu wählen); in Zukunft bezeichnen wir die Residuen von $K(x)$ mit $\tilde{e}_i = \frac{1}{w_i}$. Wir weisen darauf hin, daß sämtliche $\tilde{e}_i$ endlich sind, da mehrfache Nullstellen des Polynoms $K(x)$ ausgeschlossen wurden.

Aus der Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{K(x)} = \sum_{i=1}^3 \frac{\tilde{e}_i}{x - m_i} = \frac{1}{x} \sum_i \tilde{e}_i \left(1 + \frac{m_i}{x} + \frac{m_i^2}{x^2} + o(x^{-2})\right) \quad (2.38)$$

und dem bekannten asymptotischen Verhalten des nichtkanonischen kinetischen Operators

$$\frac{1}{K(x)} = \frac{-1}{x^3} + o(x^{-3}) \quad (2.39)$$

folgen durch Vergleich mehrere Spektralbedingungen:

$$\sum_{i=1}^3 \tilde{e}_i = 0, \quad \sum_{i=1}^3 \tilde{e}_i m_i = 0, \quad \sum_{i=1}^3 \tilde{e}_i m_i^2 = -1 \quad (2.40)$$

Daraus entnehmen wir auch, daß nicht jedes der $\tilde{\rho}_i$ positiv ausfallen kann. Im Hinblick auf die Quantisierungsbedingungen in (37) verwenden wir also einen Hilbert-Raum mit indefiniter Zustandsmetrik.

Es ist nun zweckmäßig, die kanonischen Diracfelder ψ_i zusammen mit den operatorwertigen Fourier-Amplituden $b_\alpha(k), d_\alpha^\dagger(k)$ zu reskalieren:

$$\begin{aligned}\psi_i &\mapsto \psi_i \sqrt{|\tilde{\rho}_i|}, & b_\alpha^i(k) &\mapsto \sqrt{|\tilde{\rho}_i|} b_\alpha^i(k), \\ d_\alpha^{j\dagger}(q) &\mapsto \sqrt{|\tilde{\rho}_j|} d_\alpha^{j\dagger}(q)\end{aligned}\tag{2.41}$$

Damit erhalten wir anstelle von (23),(33),(37) die neuen Beziehungen:

$$\tilde{\chi}(x) = \sum_{i=1}^3 \sqrt{|\tilde{\rho}_i|} \psi_i(x) \tag{2.42a}$$

$$P_\nu = \sum_i \int d^3x \psi_i^\dagger(x) (i\partial_\nu) \psi_i(x) \text{sgn}(\tilde{\rho}_i) \tag{2.42b}$$

$$\begin{aligned}\{b_\alpha^i(k), b_\beta^{j\dagger}(q)\} &= \{d_\alpha^i(k), d_\beta^{j\dagger}(q)\} \\ &= \delta^{ij} \delta_{\alpha\beta} \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{q}) (2\pi)^3 \frac{k^0}{|m_i|} \cdot \text{sgn}(\tilde{\rho}_i)\end{aligned}\tag{2.42c}$$

Es ist allgemein bekannt, daß die indefinite Metrik in der Antikommutator-Algebra (42c) zu einer Verletzung der Wahrscheinlichkeitsinterpretation in der Quantenmechanik führt: wir können uns der Einfachheit halber auf die indexfreie Algebra $\{b, b^\dagger\} = -1$ beschränken und wie üblich annehmen, daß b das Vakuum $|0\rangle$ vernichtet, während $b^\dagger$ einen 1-Teilchenzustand $|1\rangle$ erzeugt (Fockraum). Wir leiten dann für das Normquadrat des Zustands $|1\rangle$ die folgende Identität her:

$$\langle 1 | 1 \rangle = \langle 0 | b b^\dagger | 0 \rangle = \langle 0 | \{b, b^\dagger\} | 0 \rangle = -\langle 0 | 0 \rangle \tag{2.43}$$

Die Positivität des Wahrscheinlichkeitsmaßes geht daher verloren. In einer freien Theorie ist diese Situation noch nicht beunruhigend, weil man sich auf einen positiv definiten Teilraum des Hilbert-Raums zurückziehen kann und dadurch alle negativ definiten Zustände von der Dynamik ausschließt. Ganz anders hingegen in einer wechselwirkenden Theorie, bei der infolge von Streuprozessen die hinsichtlich ihrer Wahrscheinlichkeitsdeutung problematischen Zustände auftreten werden. Ein möglicher Ausweg im Rahmen einer Theorie bei niedrigen Teilchenenergien besteht darin, allen Zuständen eine hohe Massenskala $|m_i|$ zuzuweisen, die die negative Norm tragen. Diese effektive Dynamik hängt natürlich von der Wahl der m_i ab, wenn dadurch zuvor divergente Feynman-Diagramme für masselose Anregungen in geeigneter Weise regularisiert werden. Eine mögliche Verletzung der Unitarität der Streu-Matrix würde dann solange nicht auffallen, wie man es mit Vorgängen zu tun hat, die sich weit unterhalb dieser Massenschwellen abspielen. Hinsichtlich der Einbeziehung der Gravitationswechselwirkung wurde vorgeschlagen [1], die Planckmasse

$M_{Planck} \cdot c^2 \simeq 1,2 \cdot 10^{19} GeV$ für die Spinorfelder vorzusehen, welche negativ definit quantisiert sind.

Weitergehende Untersuchungen finden sich noch bei Heisenberg [7] und in einer Arbeit von Lee und Wick [8]. Dort werden die Auswirkungen eines Doppelpols im Propagator hinsichtlich der Unitaritätsforderung für die S-Matrix betrachtet. Das sogenannte Lee-Modell benutzt ein reelles Bosonfeld und bedient sich der starken Vereinfachung, daß Wechselwirkungen nur mit Zuständen unendlich hoher Masse stattfinden. Die aufgezählten Schwierigkeiten zwingen uns, von einer Teilchen-Interpretation des subkanonischen Spinorfeldes $\tilde{\chi}$ abzusehen. Von bestimmten Operatorprodukten mit diesem Feld werden wir allerdings annehmen, daß sie Teilchenzustände erzeugen können.

Als Nächstes betrachten wir die Auswirkungen der indefiniten Metrik auf den subkanonischen Propagator:

$$\begin{aligned}\tilde{S}(x, y) &= \langle 0 | T \tilde{\chi}(x) \bar{\tilde{\chi}}(y) | 0 \rangle \\ &= \sum_i | \tilde{e}_i | \langle 0 | T \psi_i(x) \bar{\psi}_i(y) | 0 \rangle\end{aligned}\quad (2.44)$$

Den kanonischen Dirac-Propagator im Falle eines positiven Massenparameters m haben wir schon in (12) angegeben. Um (44) auszuwerten, sind leichte Verallgemeinerungen notwendig:

- i) Falls die Antikommutator-Algebra negativ definit ist, dann erscheint bei sonst gleicher Normierung ein Faktor (-1) vor dem kanonischen Propagator. Denn nach Wahl einer bestimmten Zeitordnung wird bei der Berechnung des Vakuum Erwartungswertes zweier Feldoperatoren davon Gebrauch gemacht, daß sich die beteiligten Produkte von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren auf einen einzigen Antikommutator reduzieren lassen. Demnach ändert sich auch die Lage der Polstellen in der komplexen Energie-Ebene nicht.
- ii) Liegt ein negativer Massenparameter $- | m |$ vor, dann vertauschen die Spinoren $u_{(\alpha)}(k), v_{(\alpha)}(k)$ in (4) wegen (6) ihre Plätze. Beachtet man noch die beiden Polarisationssummen

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha} u_{(\alpha)}(k) \otimes \bar{u}_{(\alpha)}(k) &= \frac{\not{k} + | m |}{2 | m |}, \\ \sum_{\beta} v_{(\beta)}(q) \otimes \bar{v}_{(\beta)}(q) &= \frac{\not{q} - | m |}{2 | m |}\end{aligned}\quad (2.45)$$

welche nach der Ausführung der Operatoralgebra zustandekommen, so erkennt man, daß der negative Massenparameter anstelle der üblichen Teilchenmasse im Dirac-Propagator tritt, jedoch die von m^2 abhängige Lage der Polstellen nicht beeinflusst wird. Eine verwandte Argumentation benutzt, daß bei der Substitution $\psi = \gamma_5 \eta$ das Vorzeichen des Massenterms der Dirac-Lagrangedichte wechselt. Wenn η ein Teilchen mit positiver Masse $(-m)$ darstellt, dann folgt der ψ -Propagator sofort aus elementaren Eigenschaften der Dirac-Matrix γ_5 :

$$\begin{aligned}\langle 0 | T \psi_e(x) \bar{\psi}_\sigma(y) | 0 \rangle &= (\gamma_5)_{e\bar{e}} (-\gamma_5)_{\bar{\sigma}\sigma} \cdot i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left(\frac{e^{-ip(x-y)}}{\not{p} + m + i\epsilon} \right)_{\bar{e}\bar{\sigma}} \\ &= i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left(\frac{e^{-ip(x-y)}}{\not{p} - m - i\epsilon} \right)_{e\sigma}\end{aligned}\quad (2.46)$$

Damit sind wir jetzt in der Lage, den nichtkanonischen Propagator (44) auszurechnen:

$$\begin{aligned}\tilde{S}(x, y) &= \sum_i |\tilde{\epsilon}_i| \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i \cdot \text{sgn}(\tilde{\epsilon}_i) e^{-ik(x-y)}}{k - (m_i - i\epsilon \cdot \text{sgn}(m_i))} \\ &=: \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \tilde{S}(p)\end{aligned}\quad (2.47)$$

Unterdrücken wir kurz die $(i\epsilon)$ -Vorschriften, dann lautet dieser Propagator im Impulsraum (verwende (38)):

$$\tilde{S}(p) = i \sum_i \frac{\tilde{\epsilon}_i}{p - m_i} = \frac{i}{K(p)} \quad (2.48)$$

Wie im Falle des Dirac-Propagators handelt es sich im wesentlichen um den inversen kinetischen Operator der freien Theorie.

In den nachfolgenden Anwendungen übernehmen wir ein bereits von H. Saller [2] vorgeschlagenes Massenspektrum zur Kennzeichnung des kinetischen Operators $K(x)$:

$$\begin{aligned}m_1 &= M > 0, & m_2 &= \Lambda > 0, \\ m_3 &= -\Lambda < 0; & \Lambda &> M\end{aligned}\quad (2.49)$$

Die entsprechenden Spektralparameter $\tilde{\epsilon}_i$ ergeben sich direkt aus dem inhomogenen linearen Gleichungssystem (40) bzw. als Residua aus (48):

$$\tilde{\epsilon}_1 = \frac{1}{\Lambda^2 - M^2} > 0; \quad \tilde{\epsilon}_2 = \frac{-1}{2\Lambda(\Lambda - M)} < 0; \quad \tilde{\epsilon}_3 = \frac{-1}{2\Lambda(\Lambda + M)} < 0 \quad (2.50)$$

Die beiden Zustände mit negativer Metrik sollen verglichen mit M einen überaus hohen Masseneigenwert besitzen.

Die spezielle freie Lagrangedichte des subkanonischen Spinorfeldes $\tilde{\chi}$ sowie der zugeordnete Propagator sind daher:

$$\mathcal{L}_{sub} = \bar{\tilde{\chi}}(i\partial - M)(\Lambda^2 + \partial^2)\tilde{\chi} \quad (2.51a)$$

$$\tilde{S}(p) = \frac{-i(p + M)}{(p^2 - M^2 + i\epsilon) \cdot (p^2 - \Lambda^2 + i\epsilon)} \quad (2.51b)$$

In der Zerlegung nach (23) kommen also ein Feld mit Quanten negativer Masse und zwei Felder (darunter das eben genannte) mit negativ definiter Metrik im Hilbert-Raum vor. Der Parameter Λ in (51b) wirkt als Abschneideskala in Impulsraumintegralen (Cutoff), die dazu dient, gewisse Green-Funktionen zu regularisieren. Nach Saller [2] soll darunter jedoch durchaus eine physikalische Massenskala verstanden werden.^[6]

^[6]In der Theorie der Supraleitung hat man etwa die Debye-Frequenz zur Verfügung.

Um nochmals die Unterschiede zu einer kanonischen Spinorthorie zu verdeutlichen, betrachten wir auch den Antikommutator aus subkanonischen Feldern:

$$\begin{aligned}\tilde{C}(x, x') &= \tilde{C}(x - x') = \{\tilde{\chi}_\xi(x), \tilde{\bar{\chi}}_{\xi'}(x')\} \\ &= \sum_{i=1}^3 |\tilde{\ell}_i| \{\psi_\xi^i(x), \bar{\psi}_{\xi'}^i(x')\} \\ &= \sum_{i=1}^3 |\tilde{\ell}_i| (i\bar{\partial} + m_i)_{\xi\xi'} i\Delta(m_i; x - x') \cdot \text{sgn}(\tilde{\ell}_i)\end{aligned}\quad (2.52)$$

wobei

$$i\Delta(m; x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^3} \delta(k^2 - m^2) \epsilon(k^0) e^{-ikx} \quad (2.53)$$

eine ungerade Lösung der Klein-Gordon-Gleichung darstellt. Wir haben wiederum bei der Behandlung der Felder ψ_2, ψ_3 von den Hinweisen auf Seite 17 Gebrauch gemacht.

Aufgrund der Spektralbedingung $\sum_{i=1}^3 \tilde{\ell}_i = 0$ verschwindet der gleichzeitige Antikommutator sogar

$$\begin{aligned}\tilde{C}(0, \vec{x}; 0, \vec{y}) &= \sum_{i=1}^3 \tilde{\ell}_i i\gamma^0 \partial_t (i\Delta(m_i; t, \vec{x} - \vec{y}))|_{t=0} \\ &= (\sum_i \tilde{\ell}_i) \cdot \gamma^0 \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) = 0\end{aligned}\quad (2.54)$$

im Gegensatz zum kanonischen singulären Verhalten aus (11). Der Sonderfall kleiner Abstandsquadrate $|x^2| \ll m_i^{-2} (i \in \{1, 2, 3\})$ kann mit Hilfe der Lichtkegelentwicklung von (53) untersucht werden: [9]

$$\Delta(m; x) = -\frac{1}{(2\pi)} \epsilon(x^0) \delta(x^2) + \frac{m^2}{8\pi} \epsilon(x^0) \Theta(x^2) + O(x^2) \quad (2.55)$$

Daraus erhält man als führende singuläre Terme in (52):

$$\begin{aligned}\tilde{C}(x) &= \frac{1}{4\pi} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \underbrace{\gamma^0 \delta(x^0) \Theta(x^2)}_{\rightarrow \gamma^0 \delta(x^0) \Theta(-\vec{x}^2) = 0 (!)} + \epsilon(x^0) \not{x} \delta(x^2) \right) + \frac{i}{8\pi} M \epsilon(x^0) \Theta(x^2) \\ &\rightarrow \gamma^0 \delta(x^0) \Theta(-\vec{x}^2) = 0 (!)\end{aligned}\quad (2.56)$$

$$\text{mit } M = m_1 + m_2 + m_3 = M = \sum_i \tilde{\ell}_i m_i^3 \quad (\text{siehe (2.50)})$$

Der Umgang mit nichtkanonischen Feldern der Dimension $\frac{1}{2}$, wie sie z.B. in (51a) auftreten, bereitet — wie wir in diesem Abschnitt festgestellt haben — ernsthafte physikalische Schwierigkeiten, deren Behandlung noch aussteht. Die äquivalente Beschreibung als gewichtete Summe von Dirac-artigen Feldern nach (42a) besitzt gewisse Ähnlichkeit mit der von Pauli und Villars [10] eingeführten Regularisierung für Schleifendiagramme. Tatsächlich werden einige Amplituden der nichtkanonischen Spinorthorie mit Selbstwechselwirkung dadurch erst konvergent. Eine ausführliche Studie solcher Theorien mit höheren Ableitungen ist auch bei A. Pais und G. Uhlenbeck [11] zu finden.

2.2. VERWENDUNG KANONISCHER POLFELDER

Wir begegnen den kanonischen Feldern $\psi_i (i \in \{1, 2, 3\})$ wieder, falls wir in der subkanonischen Lagrangedichte (51a) geeignet Hilfsfelder bereitstellen, so daß man mit kinetischen Operatoren auskommt, welche im Impulsoperator $i\partial$ linear sind; anschließend diagonalisieren wir die so gewonnene, in den Feldern bilineare Wirkung.

Als Vorbereitung schreiben wir die von uns gewählte Lagrangedichte für das subkanonische Spinorfeld $\tilde{\chi}$ in der Form

$$\mathcal{L}_{sub} = -\bar{\tilde{\chi}}(i\partial - M) \left\{ (i\partial + M)(i\partial - M) - (\Lambda^2 - M^2) \right\} \tilde{\chi} \quad (2.57)$$

Es liegt nahe, das kanonische Hilfsfeld $\chi = (i\partial - M)\tilde{\chi}$ zusammen mit seinem adjungierten Feld zu verwenden; zu diesem Zweck benutzen wir ein Lagrangemultiplikator-Feld $\hat{\chi}$, das die Dimension $\frac{5}{2} = (\frac{3}{2} + 1)$ besitzt und sich als Dirac-Spinor verhält. Erweitert man $\mathcal{L}_{sub}$ um diese Zwangsbedingungen, dann entsteht

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{sub} = & -\bar{\tilde{\chi}}(i\partial - M) \{ (i\partial + M)(i\partial - M) - (\Lambda^2 - M^2) \} \tilde{\chi} \\ & + \bar{\tilde{\chi}}(\chi - (i\partial - M)\tilde{\chi}) + (\bar{\chi} - \bar{\tilde{\chi}}(i\partial - M))\hat{\chi} \end{aligned} \quad (2.58)$$

abgesehen von einer totalen Divergenz. Damit ist es möglich, durch Substitution die höheren Ableitungen des subkanonischen Feldes $\tilde{\chi}$ zu entfernen:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{sub} = & -(\bar{\tilde{\chi}} \quad \bar{\chi} \quad \bar{\hat{\chi}}) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}(\Lambda^2 - M^2) & (i\partial - M) \\ -\frac{1}{2}(\Lambda^2 - M^2) & (i\partial + M) & -1 \\ (i\partial - M) & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\chi} \\ \chi \\ \hat{\chi} \end{pmatrix} \\ =: & -(\bar{\tilde{\chi}} \quad \bar{\chi} \quad \bar{\hat{\chi}}) \cdot \mathcal{K} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\chi} \\ \chi \\ \hat{\chi} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.59)$$

ist äquivalent zu (58).^[7] Statt dessen müssen wir jetzt eine dreidimensionale pseudohermitesche Matrix $\mathcal{K}$ als kinetischen Term in Kauf nehmen, deren Inverses (bis auf einen Faktor) die verschiedenen zeitgeordneten Zwei-Punkt-Funktionen der Felder $\tilde{\chi}, \chi, \hat{\chi}$ enthält. Im Impulsraum bedeutet dies:

$$\begin{aligned} -i\mathcal{K}^{-1}(p) = & \langle 0 | T \begin{pmatrix} \tilde{\chi} \\ \chi \\ \hat{\chi} \end{pmatrix} (x) (\bar{\tilde{\chi}} \quad \bar{\chi} \quad \bar{\hat{\chi}}) (y) | 0 \rangle \\ = & i \frac{1}{(\not{p} - M)(\Lambda^2 - p^2)} \\ & \cdot \begin{pmatrix} 1 & (\not{p} - M) & p^2 - \frac{1}{2}(\Lambda^2 + M^2) \\ (\not{p} - M) & (\not{p} - M)^2 & (\not{p} - M) \frac{(\Lambda^2 - M^2)}{2} \\ p^2 - \frac{1}{2}(\Lambda^2 + M^2) & (\not{p} - M) \frac{(\Lambda^2 - M^2)}{2} & \frac{1}{4}(\Lambda^2 - M^2)^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.60)$$

^[7]Diese Beschreibung der subkanonischen Theorie findet sich schon bei Saller (siehe [2]).

Insbesondere entdeckt man darin den subkanonischen Propagator $\langle 0 | T \tilde{\chi}(x) \tilde{\chi}(y) | 0 \rangle(p)$ als Element $(\mathcal{K}^{-1})_{11}(p)$.

Eine Partialbruchzerlegung aller Elemente von $\mathcal{K}^{-1}$ in Linearkombinationen

$$\sum_{i=1}^3 |c_i| \frac{\text{sgn}(c_i)}{p - m_i} \quad (c_i: \text{konstant})$$

läßt erkennen, daß eine lineare, vom 4-Impuls p^μ unabhängige nichtsinguläre Transformation

$$\begin{pmatrix} \tilde{\chi} \\ \chi \\ \hat{\chi} \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} \psi_M \\ \psi_\Lambda \\ \psi_{-\Lambda} \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

existiert, welche $\mathcal{K}^{-1}$ in Diagonalform überführt:

$$-\mathcal{K}^{-1}(p) = T^T \begin{pmatrix} \frac{1}{(p-M)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{(p-\Lambda)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{(p+\Lambda)} \end{pmatrix} T \quad (2.62)$$

Bei T handelt es sich um (siehe auch (50))

$$T = \begin{pmatrix} \sqrt{\tilde{e}M} & \sqrt{-\tilde{e}\Lambda} & \sqrt{-\tilde{e}-\Lambda} \\ 0 & \sqrt{\frac{(\Lambda-M)}{2\Lambda}} & -\sqrt{\frac{(\Lambda+M)}{2\Lambda}} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{(\Lambda^2-M^2)} & \frac{1}{2}(\Lambda+M)\sqrt{\frac{(\Lambda-M)}{2\Lambda}} & \frac{1}{2}(\Lambda-M)\sqrt{\frac{(\Lambda+M)}{2\Lambda}} \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

($\Lambda \gg M$ war vorausgesetzt). T ist zwar kein orthogonaler Endomorphismus, kann aber noch in

$$T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\Lambda \sin(2\alpha)} & & \\ & 1 & \\ & & \frac{\Lambda}{\sqrt{2}} \sin(2\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}; \quad \alpha = \arccos\left(\sqrt{\frac{(\Lambda-M)}{2\Lambda}}\right) \quad (2.64)$$

faktorisiert werden; Außer den elementaren Drehmatrizen erscheint eine skalierende Diagonalmatrix mit Elementen verschiedener Energiedimension, wodurch die gemeinsame Dimension $\frac{3}{2}$ der sogenannten Polfelder $\psi_M, \psi_\Lambda, \psi_{-\Lambda}$ erreicht wird.

Diese Bezeichnung der ψ_A besteht zu Recht, denn substituiert man (61) für das subkanonische Feld $\tilde{\chi}$ und die weiteren Hilfsfelder $\chi, \hat{\chi}$ in der Lagrangedichte (59), so findet man:

$$\mathcal{L}_{sub} = \sum_A \epsilon_A \bar{\psi}_A (i\partial - m_A) \psi_A \quad (A \in \{M, \Lambda, -\Lambda\}) \quad (2.65)$$

mit

$$\epsilon_M = 1 = -\epsilon_\Lambda = -\epsilon_{-\Lambda} \quad (m_A = A) \quad (2.66)$$

Die kanonischen Diracfelder ψ_A entsprechen genau denjenigen Lösungen der Dirac-Gleichung, welche bei der im vorigen Abschnitt untersuchten $\tilde{\chi}$ -Feldgleichung (20) auftraten. Insbesondere ist auch die Linearkombination (42a) in der Transformation (61) vertreten. Der Vorzeichenfaktor $\epsilon_A \in \{-1, 1\}$ wird durch die indefinite Metrik des Zustandsraums hervorgerufen.

Die Form (65) bietet Vorteile gegenüber der Lagrangedichte (57), welche das subkanonische Feld $\tilde{\chi}$ alleine enthält, da sie linear vom Impulsoperator abhängt. Dies wird sich später (vgl. Kapitel 4) deutlich zeigen, wenn wir mit minimaler Substitution eine lokale $U(1)$ -Eichinvarianz erzielen wollen.

2.3. DER SUBKANONISCHE PROPAGATOR BEI KLEINEM ABSTAND

Die 2-Punkt-Funktion $\tilde{S}(x, y) = \langle 0 | \tilde{\chi}(x) \tilde{\chi}(y) | 0 \rangle$ des subkanonischen Feldes $\tilde{\chi}$ geht nach (44) aus einer Linearkombination der Dirac-Propagatoren zu den Polfeldern $\psi_A (A \in \{M, \Lambda, -\Lambda\})$ hervor (vgl. auch (62))

$$\tilde{S}(x, y) = \tilde{S}(x - y) = \sum_A \tilde{\epsilon}_A S_F(x - y; m_A) \quad (2.67)$$

mit $S_F(z; m_A) = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ikz}}{\not{k} - m_A + i\epsilon}$

Wir benutzen, daß auch der Propagator D eines Skalarfelds gleicher Masse m_A dieselbe Polstruktur im Impulsraum besitzt, und schreiben

$$S_F(z; m) = (i\not{\partial} + m)D(z; m) \quad (2.68)$$

mit $D(z; m) = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ikz}}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$

Eine ausführliche Behandlung der Fourier-Transformierten, welche $D(z; m_A)$ liefert, kann in [9] S. 136 ff. nachgelesen werden. Das Ergebnis lautet:^[8]

$$D(z; m) = \frac{-i\delta(\lambda)}{4\pi} + \Theta(\lambda) \frac{m}{8\pi\sqrt{\lambda}} \{Y_1(m\sqrt{\lambda}) + iJ_1(m\sqrt{\lambda})\} \\ + \Theta(-\lambda) \frac{m}{4\pi^2\sqrt{-\lambda}} K_1(m\sqrt{-\lambda}) \quad (2.69)$$

wobei $z^\mu z_\mu = \lambda$ gesetzt wurde und J_1 die Bessel-Funktion, Y_1 die Neumann-Funktion, K_1 eine modifizierte Bessel-Funktion (Hankel-Funktion mit rein imaginärem Argument) jeweils erster Ordnung darstellen. Deren Verhalten bei kleinen Argumenten $m\sqrt{\pm\lambda} \ll 1$ (d. h. in der Nähe des Lichtkegels) kann mit Hilfe "aufsteigender" Taylor-Reihen beurteilt werden, die in [12], Kapitel 9, bereitgestellt sind.

[8] Da $D(z; m_A)$ als Distribution stets in Verbindung mit hinreichend schnell abfallenden Testfunktionen benutzt wird, ist die ultraviolette Divergenz des Impulsraumintegrals in (68) unbedeutend.

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
D(z; m) = & \frac{-i\delta(\lambda)}{4\pi} + im^2 \frac{\Theta(\lambda)}{16\pi} \left(1 - \frac{m^2\lambda}{8}\right) - \frac{1}{4\pi^2\lambda} \\
& + \frac{m^2}{(4\pi)^2} \cdot \left\{ \ln \frac{m^2 |\lambda|}{4} + (2\gamma - 1) + \ln \frac{m^2 |\lambda|}{4} \cdot \left(\frac{-m^2\lambda}{8}\right) + \frac{m^2\lambda}{8} \left(\frac{5}{2} - 2\gamma\right) \right\} \\
& + \left\{ O\left(\Theta(\pm\lambda) \cdot (m^2\lambda)^2\right) + O\left(\Theta(\pm\lambda) \cdot (m^2\lambda)^2\right) \cdot \ln(m^2 |\lambda|) \right\} \cdot m^2
\end{aligned} \quad (2.70)$$

Gegenüber [9] haben wir die Entwicklung noch einen Schritt weitergeführt. Darin kommt die Euler-Mascheroni-Konstante

$$\begin{aligned}
\gamma = & - \int_1^\infty \frac{dx e^{-x}}{x} + \sum_{p=1}^\infty \frac{(-1)^{p+1}}{p! \cdot p} \\
= & \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^{N-1} 1/n - \ln N \right) \\
\approx & 0,577215 \dots
\end{aligned} \quad (2.71)$$

vor.

Wegen $i\partial_z = 2i\cancel{\partial} \cdot \partial_\lambda$ erhält man nach (68) folgende Lichtkegelentwicklung des Dirac-Propagators $S_F(z; m)$:

$$\begin{aligned}
S_F(z; m) = & mD(z; m) + 2i\cancel{\partial} \left\{ \frac{-i}{4\pi} \delta'(\lambda) + \frac{im^2}{16\pi} \delta(\lambda) \left(1 - \frac{m^2\lambda}{8}\right) \right. \\
& - \frac{im^2}{16\pi} \Theta(\lambda) \frac{m^2}{8} + \frac{1}{4\pi^2\lambda^2} + \frac{m^2}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{1}{\lambda} - \frac{m^2}{8} \ln \frac{m^2 |\lambda|}{4} + \frac{m^2}{8} \left(\frac{3}{2} - 2\gamma\right) \right\} \\
& + m^4 \cdot \left(u \cdot \{O(\delta(u)u) + O(\Theta(u))\} \right. \\
& \left. \left. + u \ln(|u|) \cdot \{O(\delta(u)u) + O(\Theta(u))\} \right) \Big|_{u=m^2\lambda} \right\}
\end{aligned} \quad (2.72)$$

Endlich wird mit (67) der subkanonische Propagator in der Nähe des Lichtkegels zugänglich; dabei spielen die Spektralbedingungen (40) eine wichtige Rolle:

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(z) = & \sum_A \tilde{e}_A \left\{ \frac{i\Theta(\lambda)}{16\pi} m_A^3 \left(1 - \frac{m_A^2\lambda}{8}\right) + \frac{m_A^3}{(4\pi)^2} \left\{ \ln \frac{m_A^2 |\lambda|}{4} + (2\gamma - 1) \right. \right. \\
& - \frac{m_A^2\lambda}{8} \ln \frac{m_A^2 |\lambda|}{4} + \frac{m_A^2\lambda}{8} \left(\frac{5}{2} - 2\gamma\right) \left. \right\} \\
& + 2i\cancel{\partial} \left\{ \frac{im_A^2}{16\pi} \delta(\lambda) \left(1 - \frac{m_A^2\lambda}{8}\right) - \frac{im_A^2}{16\pi} \cdot \frac{m_A^2}{8} \Theta(\lambda) \right. \\
& + \frac{m_A^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{m_A^2}{8} \ln \frac{m_A^2 |\lambda|}{4} + \frac{m_A^2}{8} \left(\frac{3}{2} - 2\gamma\right) \right) \left. \right\} \\
& + \sum_A \tilde{e}_A \left\{ m_A^3 \cdot (O(\Theta(\pm u_A)u_A^2) + \ln |u_A| O(\Theta(\pm u_A)u_A^2)) \right.
\end{aligned} \quad (2.73)$$

$$\begin{aligned}
& + \not{p} m_A^4 \cdot \left(\delta(u_A)(O(u_A^2) + \ln |u_A| \cdot O(u_A^2)) \right. \\
& \left. + O(\Theta(u_A)u_A) + \ln |u_A| O(\Theta(u_A)u_A) \right) \Big|_{u_A = m_A^2 \lambda}
\end{aligned}$$

Falls alle Koordinaten z^μ gegen 0 streben, entsteht asymptotisch:

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(z) = & -i\Theta(\lambda) \frac{M}{16\pi} - \frac{M}{(4\pi)^2} (2\gamma - 1) + \frac{\tilde{\epsilon}_M M}{(4\pi)^2} \left\{ M^2 \ln \frac{M^2 |\lambda|}{4} - \Lambda^2 \ln \frac{\Lambda^2 |\lambda|}{4} \right\} \\
& + 2i \not{p} \left\{ \frac{-i}{16\pi} \delta(\lambda) - \frac{1}{(4\pi)^2 \lambda} - \frac{\tilde{\epsilon}_M}{8 \cdot (4\pi)^2} \left(M^4 \ln \frac{M^2 |\lambda|}{4} - \Lambda^4 \ln \frac{\Lambda^2 |\lambda|}{4} \right) \right\} \quad (2.74) \\
& (\tilde{\epsilon}_M = (\Lambda^2 - M^2)^{-1}; \quad \lambda = z^2)
\end{aligned}$$

Die nicht mehr erscheinenden übrigen Terme verschwinden am Ursprung $z^\mu = 0$. Das Moment dritter Ordnung

$$\sum_A m_A^3 \tilde{\epsilon}_A = -M$$

sowie weitere Spektralsummen gelten für die Parameterwahl (49, 50) bei Saller (siehe [2]). Man begegnet in (74) verschiedenen Arten von Singularitäten am Lichtkegel: einem unstetigen Beitrag $\Theta(\lambda)$, der Logarithmusfunktion $\ln(\frac{M^2 |\lambda|}{4})$, der δ -Distribution und dem Polterm $\frac{1}{\lambda}$.

Falls man ein masseloses Dirac-Feld $\psi_M \equiv \psi_0$ wählt, so wird das Verhalten des subkanonischen Propagators in Lichtkegelnähe noch übersichtlicher:

$$\tilde{S}(z)|_{M=0} = 2i \not{p} \left\{ \frac{-i\delta(\lambda)}{16\pi} - \frac{1}{(4\pi)^2 \lambda} + \frac{1}{8 \cdot (4\pi)^2} \Lambda^2 \ln \frac{\Lambda^2 |\lambda|}{4} \right\} \quad (2.75)$$

Ein ähnlicher Ausdruck wurde bereits in [1] benutzt. Endlich kann man noch eine ganz von Massenskalen freie subkanonische Theorie betrachten ((51a) mit $M = \Lambda = 0$); dann vereinfacht sich der $\tilde{\chi}$ -Propagator am Lichtkegel zu

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(z)|_{M=\Lambda=0} &= \frac{2i \not{p}}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{-1}{\lambda} - i\pi \delta(\lambda) \right\} \\
&= \frac{2 \not{p}}{(4\pi)^2} \int_0^\infty du e^{-i\lambda u} \quad (2.76a)
\end{aligned}$$

H. Saller stellt ebenfalls den Polterm darin fest, welcher zwar die dominierende, aber nicht die einzige Singularität bildet (siehe [2]). Eine Dimensionsüberlegung in Verbindung mit der Lorentz-Kovarianz des masselosen $\tilde{\chi}$ -Propagators

$$\tilde{S}(z)|_{M=\Lambda=0} = -i \cdot \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\not{p}}{(p^2 + i\epsilon)^2} \cdot e^{-ipz} \quad (2.76b)$$

zeigt, daß (76a) sogar im gesamten Minkowski-Raum gültig ist. Die Berechnung des Impulsraumintegrals (b) enthält keinerlei Besselsche Funktionen.

2.4. KONSTRUKTION EINES ZUSAMMENGESetzten $U(1)$ -EICHFELDES

Von einer fundamentalen Feldtheorie, welche ausschließlich mit dem subkanonischen Spinorfeld $\tilde{\chi}$ gebildet wird, kann man verlangen, daß die Grundbausteine der Materie und deren Austauschquanten als Operatorprodukte aus $\tilde{\chi}, \bar{\tilde{\chi}}$ darin enthalten sind. Die Dynamik dieser Verbundfelder ist bestimmt durch die Art der gewählten Selbstwechselwirkung von $\tilde{\chi}, \bar{\tilde{\chi}}$ bzw. der gleichwertigen Polfelder $\psi_A (A \in \{M, \Lambda, -\Lambda\})$ — siehe (65).

Um beispielsweise die Quantentheorie des Strahlungsfeldes $A^\mu(x)$ herleiten zu können, wird das Vektorpotential so konstruiert, daß es unter einer lokalen Phasentransformation

$$\begin{aligned} \tilde{\chi} &\mapsto e^{-i\alpha(x)} \tilde{\chi}(x) \\ \text{oder } \psi_A(x) &\mapsto e^{-i\alpha(x)} \psi_A(x) \end{aligned} \quad (2.77)$$

der Konstituentenfelder $\tilde{\chi}$ bzw. ψ_A inhomogen als $U(1)$ -Konnektion variiert:

$$A_\mu(x) \mapsto A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x) \quad (2.78)$$

eben in Übereinstimmung mit dem lokalen $U(1)$ -Verhalten des elementaren Photonfelds in der Quantenelektrodynamik.

Wie in (77) vorausgesetzt wurde, sollen dabei die Spinorfelder $\tilde{\chi}, \psi_A$ Ladung bezüglich der abelschen Gruppe $U(1)$ tragen.

Jedenfalls ist ein hermitesches, bilineares Operatorprodukt, welches aus $\tilde{\chi}, \bar{\tilde{\chi}}$ besteht und keine partiellen Ableitungen aufweist, geeignet, die Skalendimension 1 des Vektorpotentials A^μ nachzuahmen (vgl. (16)). Offenbar läßt sich das inhomogene Transformationsgesetz (78) nur dann erzielen, wenn man eine nichtlokale Konstruktion anwendet, worin $\tilde{\chi}$ bzw. $\bar{\tilde{\chi}}$ an verschiedenen Raum-Zeit-Punkten

$$x_\pm = x \pm \xi/2 \quad (2.79)$$

eingehen, die um den "Split-4-Vektor" $\xi = (x_+ - x_-)$ getrennt liegen. Der Vorschlag

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &= b \lim_{\xi \rightarrow 0} \{ \bar{\tilde{\chi}}(x_-) \gamma_\mu \tilde{\chi}(x_+) - \langle 0 | T \bar{\tilde{\chi}}(x_-) \gamma_\mu \tilde{\chi}(x_+) | 0 \rangle \} \\ &\equiv b : \bar{\tilde{\chi}} \gamma_\mu \tilde{\chi} : (x) \quad (b \in \mathbb{R}) \end{aligned} \quad (2.80)$$

vermeidet, daß das Verbundfeld A^μ zusätzlich vom Splitvektor ξ abhängt, indem nach der c -Zahl-Subtraktion der 2-Punkt-Greenfunktion des Produktoperators eine Mittelung bezüglich der Raumwinkelrichtungen von $\bar{\xi}^\alpha$ und darauf der Grenzübergang $\bar{\xi}^2 \rightarrow 0$ stattfinden:^[9]

$$\overline{\lim}_{\xi \rightarrow 0} f(\xi^\alpha) = \mathcal{W}^{-1} \cdot \left(\lim_{\bar{\xi}^2 \rightarrow 0} \int \frac{d\Omega(\bar{\xi})}{2\pi^2} f(\bar{\xi}^\alpha) \right) \quad (2.81)$$

^[9] $\bar{\xi}^\alpha$ entsteht aus ξ^α durch die Wick-Rotation $\xi^0 = -i\bar{\xi}^4$; im Koordinatenraum für $\bar{\xi}$ liegt dann eine euklidische Metrik $\delta_{\alpha\beta}$ vor; durch den Operator $\mathcal{W}^{-1}$ in der nachfolgenden Definition kehrt man zur Minkowski-Metrik $\eta_{\alpha\beta}$ zurück.

Der Differenzausdruck in (80) stellt ein Normalprodukt dar, wenn $\tilde{\chi}(x)$ als freies Feld behandelt wird; dieser bleibt endlich, sobald der Splitvektor ξ^α gegen 0 strebt. Selbstwechselwirkungen des subkanonischen Spinors erfordern dann eine sorgfältigere Untersuchung des Operatorprodukts. Schließlich zeigt eine Poincaré-Transformation

$$\begin{aligned}\tilde{x}^\mu &= L^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu \quad (L \in SO(3,1)) \\ \tilde{\chi}(\tilde{x}) &= \exp\left(\frac{-i\sigma^{\mu\nu}}{4}\omega_{\mu\nu}\right)\tilde{\chi}(x) \\ \text{mit } L^\mu{}_\nu &= \left(\exp\left(\frac{1}{2}G_{\gamma\delta}\omega^{\gamma\delta}\right)\right)^\mu{}_\nu \\ ((G_{\gamma\delta})^{\mu\nu} &= \eta_\gamma{}^\mu\eta_\delta{}^\nu - \eta_\gamma{}^\nu\eta_\delta{}^\mu)\end{aligned}\tag{2.82}$$

daß wir durch die Definition (80) einen Lorentzvektor erhalten. Neben der Vektoreigenschaft der Matrizen γ^μ im Dirac-Raum ist noch die Vorschrift (81) entscheidend, weil auch der Splitvektor ξ^μ beim Übergang zum System $\tilde{x}$ neue Koordinaten annimmt. Allerdings verwandelt die Wick-Drehung selbst einen Lorentz-Boost in ein Element der Drehgruppe $SO(4)$, unter welcher der differentielle Raumwinkel $d\Omega(\tilde{\xi})$ invariant bleibt.

Als nächstes beantworten wir die Frage nach den Auswirkungen einer lokalen $U(1)$ -Umeichung (77) auf das zusammengesetzte Feld $A^\mu(x)$. Offenbar bedeutet das

$$\begin{aligned}A_\mu(x) &\mapsto A_\mu^{(\alpha)}(x) \\ &= b \cdot \overline{\lim}_{\xi \rightarrow 0} \{ (\tilde{\chi}(x_-)\gamma_\mu\tilde{\chi}(x_+) - \langle 0 | T\tilde{\chi}(x_-)\gamma_\mu\tilde{\chi}(x_+) | 0 \rangle) \\ &\quad \cdot e^{-i(\alpha_+ - \alpha_-)} \\ &\quad + \langle 0 | T\tilde{\chi}(x_-)\gamma_\mu\tilde{\chi}(x_+) | 0 \rangle \cdot \{e^{i(\alpha_- - \alpha_+)} - 1\} \} \\ &\quad \text{mit } \alpha_\pm = \alpha(x_\pm)\end{aligned}\tag{2.83}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\delta A_\mu(x) &= b \overline{\lim}_{\xi \rightarrow 0} \{ \langle 0 | T\tilde{\chi}(x_-)\gamma_\mu\tilde{\chi}(x_+) | 0 \rangle \cdot (-i\xi^\rho\alpha_{,\rho}(x) + o(\xi^\rho)) \} \\ (\alpha_{,\rho} &:= \partial_\rho\alpha)\end{aligned}\tag{2.84}$$

denn das subtrahierte Operatorprodukt, welches für $\xi \rightarrow 0$ beschränkt bleibt, gestattet es, den begleitenden Phasenfaktor $\exp(i(\alpha_- - \alpha_+))$ durch 1 zu ersetzen. Der Vakuum Erwartungswert, der für die c-Zahl-Variation von $A^\mu(x)$ verantwortlich ist, folgt aus Gleichung (74):

$$\begin{aligned}\langle 0 | T\tilde{\chi}(x_-)\gamma^\mu\tilde{\chi}(x_+) | 0 \rangle &= -\text{tr}(\gamma^\mu\tilde{S}(\xi)) \\ &= -8i\xi^\mu \left(\frac{-i}{16\pi}\delta(\xi^2) - \frac{1}{(4\pi)^2\xi^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{8(4\pi)^2}\tilde{\epsilon}_M(M^4 \ln \frac{M^2|\xi^2|}{4} - \Lambda^4 \ln \frac{\Lambda^2|\xi^2|}{4}) \right) + O(\sqrt{|\xi^2|})\end{aligned}\tag{2.85}$$

Gehen wir jetzt gemäß (81) vor, wobei einfache Symmetriebetrachtungen helfen, dann finden wir:

$$\delta A_\mu(x) = \frac{b}{8\pi^2}\alpha_{,\mu}(x)\tag{2.86}$$

Deshalb erzeugt

$$(i\partial_\mu - \frac{8\pi^2}{b}A_\mu) \quad (2.87)$$

den kovarianten Paralleltransport von Feldern, für die das Transformationsgesetz (77) besteht. Der Einfachheit halber entscheiden wir uns, die Normierung

$$b = 8\pi^2 \quad (2.88)$$

zu verwenden (vgl. [2]).

2.5. SPINORSELBSTWECHSELWIRKUNG MIT LOKALER $U(1)$ -INVARIANZ

Sobald die minimale Substitution

$$i\partial_\mu \mapsto iD_\mu = i\partial_\mu - A_\mu; \quad A_\mu(x) = 8\pi^2 : \bar{\chi}\gamma_\mu\chi : (x) \quad (2.89)$$

auf die freie Lagrangedichte (51a) des subkanonischen Spinorfelds χ angewendet wird, entstehen Selbstkopplungen, die bis zu acht Faktoren χ bzw. $\bar{\chi}$ umfassen und zum Teil über partielle Ableitungen verfügen. Außerdem ermöglichen die $U(1)$ -kovariant erweiterten Ableitungen nun die Invarianz der Wirkung sogar unter lokalen Phasentransformationen (77).

Die Ersetzung (89) ist mehrdeutig im Falle eines Spinormodells, an dessen Feldgleichungen Potenzen des Operators $i\partial_\mu$ beteiligt sind. Je nachdem, ob der d'Alembert-Operator, welcher in (51a) vorkommt, als $\partial_\mu\partial^\mu$ (a) oder aber in der Form $\not{\partial} \cdot \not{\partial}$ (b) dargestellt wird, liefert eine Substitution (89) $U(1)$ -eichinvariante Lagrangedichten mit unterschiedlichen Selbstwechselwirkungen:

$$\begin{aligned} \text{(a) } \mathcal{L}_a &= \bar{\chi}(i\not{\partial} - b_0 : \gamma^\mu \bar{\chi}\gamma_\mu\chi : - M) \\ &\cdot \{\Lambda^2 - (i\partial_\alpha - b_0 : \bar{\chi}\gamma_\alpha\chi :)(i\partial^\alpha - b_0 : \bar{\chi}\gamma^\alpha\chi :)\} \bar{\chi} \\ &\quad (b_0 = 8\pi^2) \end{aligned} \quad (2.90a)$$

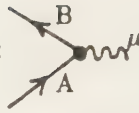
$$\begin{aligned} \text{(b) } \mathcal{L}_b &= \bar{\chi}(i\not{\partial} - b_0\gamma^\mu : \bar{\chi}\gamma_\mu\chi : - M) \\ &\cdot \{\Lambda^2 - (i\not{\partial} - b_0 : \bar{\chi}\gamma^\sigma\chi : \gamma_\sigma)(i\not{\partial} - b_0 : \bar{\chi}\gamma^\rho\chi : \gamma_\rho)\} \bar{\chi} \end{aligned} \quad (2.90b)$$

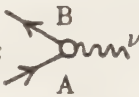
Damit sind die erzielbaren nichtlinearen Spinormodelle noch lange nicht erschöpft. Die hier angetroffene Mehrdeutigkeit wird durch den im allgemeinen nicht verschwindenden Kommutator

$$[iD_\mu, iD_\nu] = -i(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = -iF_{\mu\nu} \quad (2.91)$$

verursacht, der auf den eichinvarianten Feldstärkentensor $F_{\mu\nu}$ führt.

$$\begin{aligned} \Rightarrow iD_\mu iD^\mu - i\not{D}i\not{D} &= \frac{1}{2}F_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta} \neq 0 \\ (\sigma^{\alpha\beta} &= \frac{i}{2}[\gamma^\alpha, \gamma^\beta]) \end{aligned} \quad (2.92)$$

c) Vektorpotential – Vertex :  $-i\delta_{AB}\gamma^\mu\epsilon_A$ (2.97c)

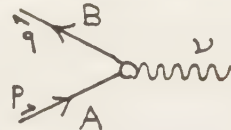
d) Multiplikatorfeld – Vertex :  $-ih_{AB}\gamma^\nu \cdot b_0$ (2.97d)

Geschlossene Spinor-Propagatorlinien tragen ein Minus-Zeichen; für jeden Schleifenimpuls l_μ ist eine Integration $\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4}$ vorhanden. Bei manchen Amplituden sind wir auf eine sorgfältigere Definition des λ_ν -Vertex (97d) angewiesen, die das Punkttrennungsverfahren $x \mapsto x \pm$ bei der Konstruktion (80) des Vektorpotentials A^μ wiedergibt. Die Translationen $x \mapsto x \pm$ des subkanonischen Feldoperators $\tilde{\chi}$ erreicht man auch mit Hilfe des Taylorreihen-Operators, weshalb (80) zu

$$A_\mu(x) = b_0 \cdot \overline{\lim}_{\xi \rightarrow 0} \{ \bar{\tilde{\chi}} \gamma^\mu e^{\frac{\overleftrightarrow{\xi} \cdot \overleftrightarrow{\partial}}{2}} \tilde{\chi}(x) - w^\mu(\xi) \} \quad (2.98)$$

mit $w^\mu(\xi) = \langle 0 | T \bar{\tilde{\chi}}(x_-) \gamma^\mu \tilde{\chi}(x_+) | 0 \rangle$

gleichwertig ist. Schiebt man den Grenzübergang $\xi \rightarrow 0$ auf, bis die Auswertung des gerade betrachteten Feynman-Diagramms beendet ist, dann regularisiert der Exponentialoperator $\exp(\xi \cdot \overleftrightarrow{\partial}/2)$, welcher am λ_ν -Vertex erscheint, eine unter Umständen divergente Schleifenimpuls-Integration (sogenannte Regularisierung durch Punkttrennung). Die zugehörige Feynman-Regel hat im Impulsraum die Form:

 $\hat{=} -ih_{AB}\gamma^\nu b_0 \exp(\frac{-i\xi}{2}(p+q))$ (2.99)

Sie ersetzt im Zweifelsfall (97d).

Darüberhinaus enthält die Lagrangedichte (96) den in λ_μ linearen Term

$$\lambda_\mu w_\mu(\xi) \cdot b_0 \quad (2.100)$$

der noch nicht divergiert, solange die ξ -Regularisierung aufrechterhalten wird. $w_\mu(\xi)$ entstand aus einem Punkttrennungs-regularisierten 1-Loop-Diagramm (Tadpole). Es ist vorauszusehen, daß die 1-Schleifen-Quantenkorrekturen zur Lagrangedichte (96) diesen Term wieder aus der effektiven Dynamik für λ_ν , A^μ entfernen werden. Zunächst ergänzen wir aber die Feynman-Regeln (97) durch den " λ_μ -Vakuum-Vertex":

$$\text{wavy line with index } \mu \text{ and a cross} \hat{=} iw_\mu(\xi) \cdot b_0 \quad (2.101)$$

Die Kopplungen (97c, 97d, 101) schränken natürlich die verfügbaren Feynman-Diagramme ein; um einige topologische Eigenschaften anzugeben, betrachten wir einen Graphen Γ , der

- I_ψ innere Polfeldpropagatoren
- I_c bosonische Kontaktpropagatoren
- E_ψ äußere Polfeldbeine
- E_A Photonfeldbeine

E_λ Multiplikatorfeld-Beine

besitzt, welche mit insgesamt

V_A Vektorfeld-Vertizes

V_λ Multiplikator-Vertizes

$\tilde{V}$ λ_μ -Vakuum-Vertizes

inzidieren.

$\Rightarrow$ (beachte der Kontaktpropagator ist nebendiagonal in den bosonischen Feldern)

$$\begin{aligned} V_A + V_\lambda &= I_\psi + \frac{1}{2} E_\psi \\ V_A &= I_c + E_\lambda \\ V_\lambda + \tilde{V} &= I_c + E_A \end{aligned} \quad (2.102)$$

Verfügt Γ über nur eine einzige Zusammenhangskomponente, so beträgt die Zahl unabhängiger Schleifen

$$L = (I_\psi + I_c) - (V_A + V_\lambda + \tilde{V}) + 1 \quad (2.103)$$

Die anstehenden Integrationen über L verschiedene Schleifenimpulse haben den oberflächlichen Divergenzgrad

$$\begin{aligned} D &= 4 \cdot L - 1 \cdot I_\psi - 0 \cdot I_c \\ &= -E_\lambda - 3E_A - \frac{3}{2}E_\psi + 2V_\lambda + 4 - \tilde{V} \end{aligned} \quad (2.104)$$

zur Folge.

Es fällt auf, daß D keine obere Schranke besitzt; zwar verringern Spinor-Propagatorketten, an deren Enden Multiplikator-Vertizes sitzen und durch die ein gemeinsamer Schleifenimpuls strömt, den oberflächlichen Divergenzgrad D , wenn die Summation über die inneren Spektral-Indizes geschieht (vgl. ab (4.5)). Insbesondere entsteht auf diese Art der subkanonische Propagator (51b) (mit Energiedimension $(-3) < (-1)$) zwischen benachbarten λ_ν -Vertizes. Trotzdem sind für jedes Tripel (E_A, E_λ, E_ψ) immer noch unendlich viele Graphen Γ vorhanden, deren Amplituden divergieren, wenn V_λ nur hinreichend groß gewählt wird. Daran scheitert der Versuch, das vorliegende Modell wechselwirkender subkanonischer Spinorfelder zu renormieren, falls man Quellen für die äußeren Polfelder zuläßt. Sollten wir auf derartige Schwierigkeiten stoßen, benutzen wir einen Lorentz-invarianten Cutoff mit der Bedeutung einer physikalischen Massenskala.

Eine weitaus niedrigere Schranke D für den oberflächlichen Divergenzgrad erhält man, falls alle äußeren Spinorbeine zu subkanonischen Feldern $\tilde{\chi}, \bar{\tilde{\chi}}$ gehören. Die Feynmangraphen Γ können jetzt auf der Grundlage der Lagrangedichte (94) gewonnen werden. Wir behalten die Bezeichnungen $I_c, V_\lambda, \tilde{V}, E_A, E_\lambda$ bei und fügen $E_{\tilde{\chi}}, I_{\tilde{\chi}}$ (Zahl äußerer Beine $\tilde{\chi}, \bar{\tilde{\chi}}$ bzw. innerer subkanonischer Propagatoren) sowie $V_{A\rho\beta\sigma}$ (Zahl der Vertizes mit Ableitungskopplung der Ordnung σ zwischen $\tilde{\chi}, \bar{\tilde{\chi}}, A^\mu$ (letzteres ρ -fach)) noch hinzu. Inzidenzen ergeben drei Nebenbedingungen. Damit kann

$$D = -\frac{1}{2}E_{\tilde{\chi}} - 3E_A - E_\lambda - 2V_A - V_{A^2} - V_{A\beta} - \tilde{V} + 4 \quad (2.105)$$

gezeigt werden. Neben diesen Variablen sind noch V_{A^3} , $V_{A^2\partial}$, $V_{A\partial^2}$, V_λ frei wählbar, wirken sich jedoch auf den oberflächlichen Divergenzgrad D gar nicht aus. Dieser ist nicht nur nach oben beschränkt, sondern nimmt auch monoton ab, falls die Zahl der äußeren Feldbeine ansteigt. Deswegen scheint unter diesen Umständen eine Beseitigung der Divergenzen, die von höheren Schleifenordnungen herrühren, möglich, indem man eine endliche Zahl von Gegentermen in der Spinor-Lagrangedichte vorsieht.

2.6. 1-SCHLEIFEN-KORREKTUR DES FREIEN SUBKANONISCHEN PROPAGATORS

Wir suchen nach den 1-Teilchen-irreduziblen Feynman-Diagrammen bzw. Tadpole-Diagrammen mit zwei äußeren Polfeldbeinen $\bar{\psi}_A, \psi_B$. Graphen mit mehr als einer Schleife bleiben außer Betracht. Die Vertex- und Linienzahlen entnimmt man den Gleichungen (102), (103), wobei hier $E_\psi = 2, E_\lambda = E_A = 0$ gültig sind:

$$L = 1 \Rightarrow V_\lambda = 1, V_A = 1 + \tilde{V} = I_c = I_\psi \quad (2.106a)$$

$$L = 0 \Rightarrow V_\lambda = 0, V_A = I_c = I_\psi + 1 = \tilde{V} \quad (\tilde{V} \neq 0) \quad (2.106b)$$

Von den Baumgraphen (b) ist nur derjenige mit $\tilde{V} = 1$ irreduzibel. Darüberhinaus entspricht bereits jedem der $\tilde{V}$ λ_μ -Vakuum-Vertizes (101) eine (regularisierte) Tadpole-Schleife. Deshalb verlangt eine konsistente Behandlung, in (106a) nur den Fall $\tilde{V} = 0$ zuzulassen.

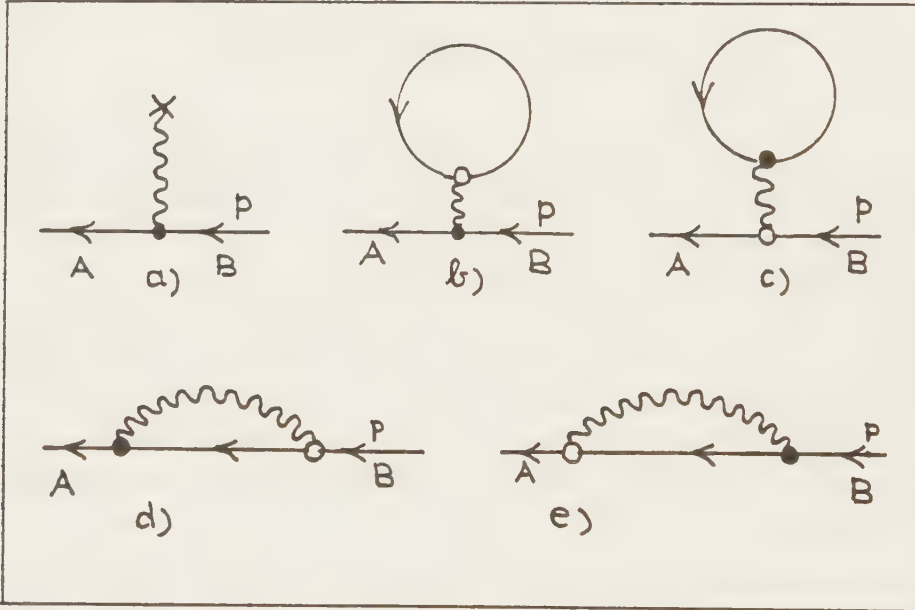


Abb. 1: a) – e): Feynmandiagramme $\Gamma^{(a)} \dots \Gamma^{(e)}$, die zur Selbstenergie-Matrix (ohne äußere Beine) beitragen (Ordnung $\hbar$); a) $L = 0$, b) – e) $L = 1$; d), e) sind auch Tadpoles wegen des trivialen Kontaktpropagators.

Man überlegt sich, daß die Selbstenergiefunktion F_{AB} in der getroffenen Näherung aus insgesamt fünf Graphen $\Gamma_{(i)}$ besteht (siehe Bild 1). Deren Auswertung ergibt im einzelnen folgende

regularisierte Amplituden $I^{(i)}$:

a) Diagramm Γ_a (vgl. Vertexregel (101))

$$I_{AB}^{(a)} = i\delta_{AB}\epsilon_A b_0 \psi(\xi) \quad (2.107a)$$

b) Diagramm Γ_b (verwende λ_ν -Vertex aus (99))

$$\begin{aligned} I_{AB}^{(b)} &= (-i\delta_{AB}\epsilon_A \gamma_\mu) \cdot ig^{\mu\nu} \\ &\cdot \int \frac{d^4 q}{N} \sum_A \text{tr}_D \left(\frac{i\epsilon_A |\tilde{\ell}_A|}{\not{\ell} - m_A} (-i\gamma_\nu) \right) b_0(-1) \cdot e^{-i\xi q} \\ &= -I_{AB}^{(a)} \end{aligned} \quad (2.107b)$$

c) Diagramm Γ_c

$$\begin{aligned} I_{AB}^{(c)} &= (-ih_{AB}\gamma_\mu b_0 e^{-i\xi p}) ig^{\mu\nu} \\ &\cdot \int \frac{d^4 q}{N} \text{tr}_D \left(\sum_A \frac{i\epsilon_A}{\not{\ell} - m_A} (-i\gamma_\nu \epsilon_A) \right) \cdot (-1) |_{PV} = 0 \end{aligned} \quad (2.107c)$$

Eine Pauli-Villars-Regularisierung erscheint angebracht (vgl. Anhang B); das Furry-Theorem (Näheres in Anhang C.1) kommt im dann wohldefinierten Schleifenintegral $\int \frac{d^4 q}{N}$ zur Geltung oder man verwendet einfach die Antisymmetrien des Integranden.

d,e) Diagramme Γ_d, Γ_e :

$$\begin{aligned} I_{AB}^{(d)}(p; \xi) &= \int \frac{d^4 q}{N} (-i\gamma^\mu \epsilon_A) \frac{i\epsilon_A e^{-i\frac{\xi}{2}(q+2p)}}{\not{\ell} + \not{p} - m_A} \\ &\cdot (-ib_0 \gamma^\nu h_{AB}) ig^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.107d)$$

Entweder auf direktem Weg oder über die ladungskonjugierte Amplitude zu $I^{(d)}$ verschaffen wir uns $I^{(e)}$ (siehe nochmals Anhang C.1):

$$I_{AB}^{(e)}(p; \xi) = C(I^{(d)}) \begin{pmatrix} p \mapsto -p \\ \xi \mapsto -\xi \end{pmatrix}^T C^{-1} = I_{BA}^{(d)}(p; \xi) \quad (2.107e)$$

Da der triviale Kontaktpropagator nicht vom Impuls q abhängt, geht aus dem Schleifenintegral der Dirac-Propagator (72) an der Stelle $(\xi/2)$ hervor; mit Hilfe einer Matrix-Notation für den Massenparameter-Raum erhält man:

$$iI^{(d)} = \gamma^\mu \{b_0 S_F(\frac{\xi}{2}; m) e^{-i\frac{\xi}{2}p}\} \gamma_\mu \cdot h =: U \cdot h \quad (2.108)$$

Wir fassen die unter a) – e) gewonnenen Amplituden zusammen, um die Selbstenergiefunktion F_{AB} zu bilden:

$$F = i\{I^{(a)} + I^{(b)}\} + iI^{(c)} + i\{I^{(d)} + I^{(e)}\} = U \cdot h + h \cdot U \quad (2.109)$$

Dann genügen die Punkttrennungs-regularisierten Polfeld-Propagatoren

$$D_{AB}^{(\xi)} = \langle 0 | T \psi_A(x) \bar{\psi}_B(y) e^{i \int d^4 x \mathcal{L}_{int}} | 0 \rangle (p) \quad (2.110)$$

der folgenden Dyson-Gleichung, wenn man sich auf die 1-Schleifen-Näherung beschränkt:

$$D^{(\xi)}(p) = \frac{i}{\not{p} - m} \epsilon + \frac{i}{\not{p} - m} \epsilon (-iF) D^{(\xi)}(p) \quad (2.111)$$

$$\Rightarrow D^{(\xi)}(p) = \frac{i\hbar}{\not{p} - m - \epsilon F \hbar} \cdot \epsilon \quad (2.112)$$

wobei das Planck-Wirkungsquantum $\hbar$ sich nach einer Umskalierung der bisher dimensionsfreien Wirkung $\int d^4 x \mathcal{L}_b \mapsto \int d^4 x \frac{\mathcal{L}_b}{\hbar}$ bemerkbar macht.^[10] Die Entwicklung des Propagators in eine $\hbar$ -Taylorreihe besitzt als Koeffizienten der n -ten Ordnung eine $(n-1)$ -Schleifenamplitude. Stets erwerben zusammenhängende Diagramme wegen der Identität (103) diese Potenzen der Planckschen Konstante.

Die Linearkombination (42a) liefert nun für den gesuchten Propagator des subkanonischen Spinorfeldes $\tilde{\chi}$

$$\tilde{D}^{(\xi)} = \sum_{A,B} D_{AB}^{(\xi)}(p) \sqrt{|\tilde{\epsilon}_A \tilde{\epsilon}_B|} = \text{tr}_F(D^{(\xi)}(p) \cdot h) \quad (2.113)$$

(gültig in 1-Schleifen-Näherung). Bevor wir die Spur des Massenspektrums nehmen, lohnt es sich, die symmetrische Matrix h zu diagonalisieren:

$$R^{-1} h R = \Delta = \begin{pmatrix} \sigma & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad (2.114)$$

wobei das $SO(3)$ -Element

$$R = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}); \quad (R^{-1} = R^T) \quad (2.115)$$

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} (\sqrt{|\tilde{\epsilon}_M|}, \sqrt{|\tilde{\epsilon}_\Lambda|}, \sqrt{|\tilde{\epsilon}_{-\Lambda}|})^T$$

$$v_A = \epsilon_A u_A$$

$$\vec{w} = (\vec{u} \times \vec{v})$$

$$\sigma = 2\tilde{\epsilon}_M$$

die normierten zueinander orthogonalen Eigenvektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ von h enthält.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \tilde{D}^{(\xi)}(p) &= \text{tr}_F \left(\frac{i\hbar}{R^{-1} \{ \epsilon(\not{p} - m) - \hbar F \} R} \cdot \Delta \right) \\ &= i\hbar \sigma \left(\frac{1}{R^{-1} \{ \epsilon(\not{p} - m) - \hbar F \} R} \right)_{MM} \end{aligned} \quad (2.116)$$

^[10] Wir ersparen uns, den Kopplungsparameter b_0 (siehe (108)) durch $b = \frac{b_0}{\hbar}$ abzulösen, so daß die Einheiten übereinstimmen.

Wir bereiten uns auf die erforderliche Matrixinversion vor und legen die Spektralparameter (50) (nach Saller) zugrunde. Ziehen wir noch die Bedingungen (40) heran, so folgt schnell

$$R^{-1}\epsilon(\not{p}-m)R = \begin{pmatrix} 0 & (\not{p}-M) & \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \\ (\not{p}-M) & 0 & -\frac{1}{\sqrt{\sigma}} \\ \frac{1}{\sqrt{\sigma}} & -\frac{1}{\sqrt{\sigma}} & -(\not{p}+M) \end{pmatrix} \quad (2.117)$$

Die Quantenkorrekturen dazu findet man in der Matrix

$$\begin{aligned} -R^{-1}FR &= -\Delta \cdot (R^{-1}UR) - (R^{-1}UR) \cdot \Delta \\ &= (-\sigma) \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot \vec{u}^T U \vec{u} & \vec{u}^T U \vec{v} & \vec{u}^T U \vec{w} \\ \vec{u}^T U \vec{v} & 0 & 0 \\ \vec{u}^T U \vec{w} & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.118)$$

(siehe (109, 114)).

$$\begin{aligned} \Rightarrow \tilde{D}^{(\xi)}(p) &= i\hbar \left\{ (\not{p}-M)(\Lambda^2 - p^2) \right. \\ &\quad \left. + \hbar \{ -2\vec{u}^T U \vec{u} + \sigma \vec{u}^T U \vec{v} (2p^2 - \Lambda^2 - M^2) - 2\sqrt{\sigma} \vec{u}^T U \vec{w} (\not{p}-M) \} + O(\hbar^2) \right\} \end{aligned} \quad (2.119)$$

Der freie subkanonische Propagator (51b) stellt darin den Term 1. Ordnung in $\hbar$ dar. Auf Terme der Ordnung $\hbar^2$ im Nenner mußten wir verzichten, weil erst dann wieder ein konsistentes Ergebnis erreicht wird, wenn man sämtliche Selbstenergiebeiträge mit zwei Schleifen einbezieht.

Die Diagonalmatrix U (vgl. (108)) divergiert, falls sich der Splitvektor ξ dem Lichtkegel nähert. Neben der Punkttrennungs-Regularisierung der Lagrangedichte wird in $\mathcal{L}_b$ (siehe (96)) noch eine Mittelung über die euklidischen Raumwinkel-Richtungen des Vektors $\bar{\xi}$ verlangt, welche jetzt nachgeholt wird. Wir berücksichtigen dabei nicht die Unstetigkeiten bzw. Singularitäten, die von der Stufenfunktion Θ und deren partiellen Ableitungen herrühren (im Zuge der Wick-Rotation gehen diese Distributionen sowieso verloren). Wir gelangen auf diese Weise zu:

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \mathcal{W}^{-1} \left\{ \int \frac{d\Omega(\bar{\xi})}{2\pi^2} U(\bar{\xi}) \right\} \\ &= -\frac{32m}{\lambda} + m(2t_m - m^2 \cdot t_2) + p^2 m + \not{p} \left(-\frac{8}{\lambda} - \frac{m^2}{2} + \frac{p^2}{6} \right) \\ &\quad + o(1) + \ln |\lambda| \cdot o(1) \\ &\quad t_m = m^2 \ln \frac{m^2 |\lambda|}{16} \\ &\quad t_2 = 2(1 - 2 \cdot \gamma); \quad \lambda = \xi^2 \end{aligned} \quad (2.120)$$

wenn wir die asymptotische Entwicklung (72) benutzen.

Damit werden noch die Bilinearformen im Nenner des subkanonischen Propagators (119) bestimmt; es entsteht:

$$\begin{aligned} \overline{\tilde{D}^{(\xi)}(p)} = & i\hbar / \left\{ (p - M)(\Lambda^2 - p^2) \right. \\ & + \hbar \left\{ \not{p} p^2 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) + p^2 \cdot 2M\vartheta + \not{p} \left(\frac{80}{\lambda} - 4t_M + 2\Lambda^2 t_2\right) - 2M\Lambda^2 \vartheta \right\} \\ & \left. + \hbar^1 \cdot (o(1) + \ln |\lambda| \cdot o(1)) + O(\hbar^2) \right\} \\ & \text{mit } \vartheta = t_2 + \sigma(t_M - t_\Lambda); \end{aligned} \quad (2.121)$$

Begreifen wir $\sqrt{|\lambda|} = \sqrt{|\xi^2|}$ als einen Längen-Cutoff mit physikalischer Bedeutung (der subkanonische Propagator kann noch nicht verhindern, daß verschiedene 1-Teilchen-irreduzible Green-Funktionen weiterhin divergieren), so verändert die 1-Schleifen-Selbstenergie den $\tilde{\chi}$ -Propagator beträchtlich: es findet nicht nur eine Umgestaltung des den Polstellen entsprechenden Massenspektrums (bisher $\{M, \Lambda, -\Lambda\}$) statt, sondern bei ultravioletten Impulsen gilt auch ein neues asymptotisches Verhalten:

$$\overline{\tilde{D}^{(\xi)}(p)} \xrightarrow{|p^2| \gg \Lambda^2} \frac{i}{-\frac{7}{3}\not{p}p^2} \quad (2.122)$$

Deshalb gerät die nichtlineare Spinortheorie, welche das Verbundfeld A^μ besitzt, in eine schwierige Lage, wenn man 1-Schleifen-Korrekturen heranzieht. Die vorgeschlagene Deutung der Skalen M, Λ als die Masse schwerer $SU(2)$ -Eichbosonen bzw. Planck-Masse wird fraglich. Das nach dem Punkttrennungs-Verfahren zusammengesetzte Feld A^μ (vgl. (80)) bedarf wegen (122) zumindest einer Anpassung, um noch die Rolle der Konnektion in der kovarianten Ableitung (87) übernehmen zu können.

Selbst das vergleichsweise günstige Verhalten des freien subkanonischen Propagators bei kleinen Abständen verhinderte nicht, daß die Diagramme Bild 1d,e divergieren, sobald der Cutoff λ gegen 0 strebt. Durch einen Blick auf die Lagrangedichte (96), die über Ableitungen bis zur dritten Ordnung des Spinorfelds $\tilde{\chi}$ verfügt, erkennt man, welch hoher Preis für die Einführung der Selbstwechselwirkungen mittels minimaler Substitution zu entrichten ist: Ableitungskopplungen erscheinen unvermeidlich und gefährden die Konvergenz von Schleifen-Amplituden. Wiederholt man die Berechnung der Selbstenergiekorrektur des $\tilde{\chi}$ -Propagators, wobei man sich auf die Feynman-Regeln gemäß (94) stützt, so erhält man — wie erwartet — ebenfalls (121).

3. Der Pfadintegralformalismus und die effektive Wirkung

3.1. ERZEUGENDE FUNKTIONALE FÜR DIE GREEN-FUNKTIONEN

Die Elemente der Streumatrix S geben die Übergangsamplituden zwischen einlaufenden ($x^0 \rightarrow -\infty$) | in)-Zuständen und auslaufenden ($x^0 \rightarrow +\infty$) out |-Zuständen an. Durch die bekannte LSZ-Reduktionsformel^[11] kann man Streuprozesse von auf der Massenschale liegenden Teilchen, welche der asymptotisch freien Feldtheorie angehören, mit den sogenannten Green-Funktionen

$$G(x_1, \dots, x_n)$$

der wechselwirkenden Theorie in Verbindung bringen. Bei letzteren handelt es sich um den Vakuumerwartungswert eines zeitgeordneten Produkts aus mehreren Feldoperatoren. Benutzt man eine Operatorschreibweise, dann kann das erzeugende Funktional S der Streumatrix im einfachen Fall einer skalaren Quantenfeldtheorie als

$$S =: e^{\int d^4 y \varphi_{\text{in}}(y) (\square_y + m^2) \frac{\delta}{\delta j(y)} : Z(j) \Big|_{j=0} \quad (3.1)$$

$$Z(j) = \langle 0 | T e^{i \int d^4 x j(x) \varphi(x)} | 0 \rangle$$

dargestellt werden (das wechselwirkende Feld heißt φ , m bezeichnet die Ruhemasse der 1-Teilchen-Anregungen; die Variable φ_{in} vertritt hingegen das freie einlaufende φ -Feld). Darin erscheint das erzeugende Funktional $Z(j)$ der Green-Funktionen des Skalarfeldes φ , welche abgesehen von numerischen Faktoren mit den Koeffizienten seiner Taylor-Reihenentwicklung nach $j(x)$ übereinstimmen. Die Auswirkungen der im Zuge einer Störungsentwicklung notwendigen Renormierung auf $Z(j)$ sind in der formalen Identität (1) noch nicht berücksichtigt. Es ist offensichtlich, wie die obige Beziehung angepaßt werden kann, falls zusätzliche Felder (Tensoren, Spinoren) an den Wechselwirkungen teilnehmen können. Wir halten uns auch im Folgenden an das von Itzykson und Zuber verfaßte Lehrbuch [5] zur Quantenfeldtheorie.

Die perturbative oder nach Potenzen des Planckschen Wirkungsquantums $\hbar$ vorgenommene Entwicklung einer Green-Funktion läßt sich mit Hilfe der Feynman-Diagramme sehr gut veranschaulichen. Berücksichtigt man lediglich die zusammenhängenden Feynman-Graphen und bildet damit die sogenannten zusammenhängenden Green-Funktionen $G_c(x_1, \dots, x_n)$, so gilt für deren erzeugendes Funktional

$$G_c(j) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4 x_1 \cdots d^4 x_n G_c(x_1, \dots, x_n) j(x_1) \cdots j(x_n) \quad (3.2)$$

die Beziehung

$$e^{G_c(j)} = Z(j) \quad (3.3)$$

[11] Diese Formel wurde zuerst von Lehmann, Symanzik und Zimmermann aufgestellt.

Schließlich versteht man unter den 1-Teilchen-irreduziblen (kurz: 1-PI) Diagrammen jene zusammenhängenden Feynman-Diagramme, die selbst beim Zerschneiden einer inneren Linie nicht in zwei disjunkte Komponenten zerfallen und deren äußere Beine amputiert wurden. Diesmal geht das erzeugende Funktional Γ der zugehörigen eigentlichen oder 1-PI Green-Funktionen $\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$, die man durch Anwendung der Feynman-Regeln ermitteln kann, aus $G_c(j)$ mittels einer Legendre-Transformation hervor:

$$\begin{aligned} i\Gamma(\varphi_c) &= \left(G_c(j) - i \int d^4x j(x) \varphi_c(x) \right) \Big|_{j(x)=j_c(x, \varphi_c)} \\ \Gamma(\varphi_c) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \varphi_c(x_1) \cdots \varphi_c(x_n) \end{aligned} \quad (3.4)$$

wobei

$$\varphi_c(x) = \frac{\delta G_c(j)}{i\delta j(x)} \Big|_{j(x)=j_c(x, \varphi_c)} \quad (3.5)$$

besteht (der Index c erinnert daran, daß $\varphi_c(x)$ hier lediglich eine c -Zahl-Funktion bedeutet).

Pfadintegrale sind sehr hilfreich, wenn es darum geht, ein tieferes Verständnis für die Amplituden der Quantenmechanik zu erwerben. Diese Methode wurde zuerst von Dirac aufgegriffen und später durch Feynman in allen Einzelheiten untersucht. Betrachtet man den Fall eines Systems mit einem einzigen Freiheitsgrad q , so läßt sich die Übergangsamplitude

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \langle q_f | e^{-iH(t_f - t_i)} | q_i \rangle \quad (3.6)$$

in der Form

$$\int \mathcal{D}q \exp \left(i \int_{t_i}^{t_f} L(q, \dot{q}) dt \right); \quad L(q, \dot{q}) = p\dot{q} - H(p, q) \quad (3.7)$$

als Funktionalintegral darstellen. $\mathcal{D}q$ gibt ein Maß auf dem Raum der Bahnfunktionen $q(t)$ an, welche den Randbedingungen $q(t_i) = q_i \wedge q(t_f) = q_f$ genügen. Es entsteht im Laufe einer ständig verfeinerten Zerlegung $(t_1, \dots, t_{n-1})$ des Zeitintervalls $[t_i, t_f]$:

$$\mathcal{D}q \sim \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{p=1}^{n-1} dq_p \quad \left(t_p = t_i + \frac{p}{n}(t_f - t_i) \right)$$

Bevor man beginnt, (7) auf ein System mit unendlich vielen Freiheitsgraden (Quantenfeldtheorie) zu übertragen, lohnt es sich, Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren $a, a^\dagger$ im Raum der analytischen Funktionen einer komplexen Variablen darzustellen. Bosonische und fermionische Systeme werden dabei unterschiedlich behandelt:

- Liegt eine Kommutationalgebra

$$[a, a^\dagger] = 1$$

vor, dann verwendet man die Übersetzung

$$a \mapsto \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad a^\dagger \mapsto \bar{z} \quad (3.8)$$

Der Funktionenraum trägt dabei den Namen Bargmann-Fock-Raum. Man kann ein Skalarprodukt einführen und gelangt auf diese Weise zu einem Hilbert-Raum. Der Operator-kern des quantenmechanischen Entwicklungsoperators kann nun ähnlich wie in (7) durch ein Pfadintegral im Bargmann-Fock-Raum ausgedrückt werden, wobei für das Funktionalmaß die symbolische Notation

$$\int \mathcal{D}(z, \bar{z}) \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \prod_{k=1}^{n-1} \frac{dz_k d\bar{z}_k}{2\pi i} \dots \quad (3.9)$$

üblich ist. Gerade bei der Untersuchung des harmonischen Oszillators tauchen wiederholt Gauß-Integranden auf; dafür steht die wichtige Integrationsformel

$$\int \prod_{j=1}^N \frac{dz_j d\bar{z}_j}{2\pi i} e^{-\bar{z}Az + \bar{u}z + \bar{z}u} = \frac{1}{\det A} e^{\bar{u} \cdot A^{-1} \cdot u} \quad (3.10)$$

$$\left(\begin{array}{l} \bar{z} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_N) \in \mathbb{C}^n \\ z = (z_1, \dots, z_N)^T \in \mathbb{C}^n \quad \bar{u}, u \text{ analog} \end{array} \right)$$

bereit. A ist die Darstellungsmatrix einer nicht-singulären quadratischen Form, deren hermitescher Anteil positiv definit sein möge. Die Exponentialfunktion der rechten Seite ist mit dem Wert des Integranden am stationären Punkt identisch.

- Berezin fand die zu einer Antikommutatoralgebra

$$\{a, a^\dagger\} = 1, \quad a^2 = 0, \quad (a^\dagger)^2 = 0$$

passende Konstruktion. Man benötigt antikommutierende Variable $\eta, \bar{\eta}$:

$$\eta\bar{\eta} + \bar{\eta}\eta = 0 \quad \eta^2 = \bar{\eta}^2 = 0 \quad (3.11)$$

Ist nur ein Freiheitsgrad vorhanden, so enthält

$$\{f; f = f_0 + f_1 \cdot \bar{\eta}\} \quad (f_0, f_1 \in \mathbb{C})$$

schon sämtliche von $\bar{\eta}$ abhängenden Polynome. Die Darstellung der Algebra wird von den zueinander adjungierten Operatoren

$$a \mapsto \bar{\partial}, \quad a^\dagger \mapsto \bar{\eta} \quad (3.12)$$

übernommen (beachte, daß sich diese Wahl mit $a^2 = 0, (a^\dagger)^2 = 0$ verträgt). Um zu einem geeigneten Skalarprodukt zu gelangen, legt man folgende ungewöhnliche Integrationsregeln für die Erzeugenden der antivertauschenden Algebra fest:

$$\int d\bar{\eta} \bar{\eta} = \int d\eta \eta = 1 \quad \int d\bar{\eta} 1 = \int d\eta 1 = 0 \quad (3.13)$$

Daran liegt es, daß (10) diesmal durch die Gauß-Integrationsformel

$$\int \prod_{k=1}^N d\bar{\eta}_k d\eta_k e^{\{-\bar{\eta} A \eta + \bar{\eta} \xi + \bar{\xi} \eta\}} = \det A \cdot e^{\bar{\xi} A^{-1} \xi} \quad (3.14)$$

$$\begin{pmatrix} \eta = (\eta_1, \dots, \eta_N)^T & \xi, \bar{\xi} \text{ genauso} \\ \bar{\eta} = (\bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_N) \end{pmatrix}$$

abgelöst wird.

Die eben dargestellten Überlegungen können sofort angewendet werden, um eine Pfadintegraldarstellung des Operators S für die Streumatrix (1) zu gewinnen. Wir besprechen das Ergebnis wiederum anhand der Theorie eines selbstgekoppelten Skalarfeldes φ , als dessen Lagrangedichte wir

$$\mathcal{L}_s = \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - \frac{m^2}{2}\varphi^2 - V(\varphi) \quad (3.15)$$

annehmen.

In [5], Kapitel 9 wird das erzeugende Funktional $Z(j)$ der Green-Funktionen mit

$$Z(j) = e^{-i \int d^4x V(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j(x)})} Z_0(j) \quad (3.16a)$$

$$Z_0(j) = e^{\frac{i}{2} \int d^4x \int d^4y j(x) \cdot (-D(x-y; m)) \cdot j(y)} \quad (3.16b)$$

angegeben (vgl. (2.68)). Offenbar erzeugt $Z_0(j)$ die Green-Funktionen eines freien Skalarfeldes. Berechnungen im Bargmann-Fock-Raum lassen sodann die Pfadintegralschreibweise

$$Z_0(j) = \int \mathcal{D}\varphi e^{i \int d^4x \left\{ \varphi(x) \cdot j(x) + \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - \frac{m^2}{2}\varphi^2 \right\}} \quad (3.17)$$

erkennen. Die gesuchte funktionale Darstellung der Erzeugenden $Z(j)$ lautet damit

$$Z(j) = \int \mathcal{D}\varphi e^{i \int d^4x (\mathcal{L}_s(x) + j(x) \cdot \varphi(x))} \quad (3.18)$$

(16b) verlangt die Normierung $Z_0(0) = 1$, was durch eine Anpassung des Maßes $\mathcal{D}\varphi$ schnell verwirklicht wird. Der die Lagrangedichte $\mathcal{L}_s$ begleitende Term $(j \cdot \varphi)$ kann als die Kopplung einer äußeren Quelle an das untersuchte System begriffen werden. Man gelangt gleichfalls bis auf einen konstanten Faktor von (17) zum expliziten Ausdruck (16b), falls man die Pfadintegration $\int \mathcal{D}\varphi$ entsprechend dem Gauß-Integral für eine reelle Integrationsvariable erledigt.

3.2. DIE EFFEKTIVE WIRKUNG Γ BIS ZUR ORDNUNG $\hbar$

Wir setzen eine Lagrangedichte $\mathcal{L}(\varphi; \epsilon, \epsilon^\dagger; \psi, \bar{\psi})$ voraus, welche von mehreren reellen bosonischen Feldern φ_i , sowie weiteren komplexwertigen bosonischen Feldern ϵ_j und verschiedenen Fermionfeldern ψ_k abhängt (die $\varphi_i, \epsilon_j, \psi_k$ werden der Reihe nach in den Spaltenvektoren φ, ϵ, ψ zusammengefaßt; wir ersparen uns, Tensor- bzw. Spinorindizes explizit anzugeben).

$\int d^4x \mathcal{L}$ besitzt die Dimension einer Wirkung; bisher wurde dafür das Plancksche Wirkungsquantum $\hbar$ als Einheit verwendet. Macht man dies rückgängig, dann nimmt das erzeugende Funktional Z aller Green-Funktionen folgende Form an (vgl. (18)):

$$Z(j_\varphi; j_\epsilon^\dagger, j_\epsilon; \bar{j}_\psi, j_\psi) = \int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\epsilon^\dagger \mathcal{D}\epsilon \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{\frac{i}{\hbar} \int d^4x \left\{ \mathcal{L}(\varphi; \epsilon, \epsilon^\dagger; \psi, \bar{\psi}) + j_\varphi^T \cdot \varphi + j_\epsilon^\dagger \cdot \epsilon + \epsilon^\dagger \cdot j_\epsilon + \bar{j}_\psi \cdot \psi + \bar{\psi} j_\psi \right\}} \quad (3.19)$$

Normierung $Z(0; 0, 0; 0, 0) = 1$

(Die Operatorquellen erscheinen als Zeilen- bzw. Spaltenvektoren $j_\varphi, j_\epsilon^\dagger, j_\epsilon, \bar{j}_\psi, j_\psi$).

Im Grenzfall $\hbar \rightarrow 0$ stammt der überwiegende Beitrag zum Funktionalintegral aus der Umgebung derjenigen Feldkonfiguration

$$S \equiv (\varphi_0; \epsilon_0, \epsilon_0^\dagger; \psi_0, \bar{\psi}_0) \quad (3.20)$$

für die sich die Phase in (19) stationär verhält. Diese Felder erfüllen daher die klassischen Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi} \Big|_S + j_\varphi^T &= 0 \\ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \epsilon} \Big|_S + j_\epsilon^\dagger &= 0; & \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \epsilon^\dagger} \Big|_S + j_\epsilon &= 0; \\ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi} \Big|_S + \bar{j}_\psi &= 0; & \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \bar{\psi}} \Big|_S + j_\psi &= 0; \end{aligned} \quad (3.21)$$

des an die äußeren Quellterme linear gekoppelten Systems.

Wir entwickeln schließlich den Exponenten aus (19) um die Konfiguration S ; dazu setzen wir:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 + \varphi_1 \\ \epsilon &= \epsilon_0 + \epsilon_1; & \epsilon^\dagger &= \epsilon_0^\dagger + \epsilon_1^\dagger \\ \psi &= \psi_0 + \psi_1; & \bar{\psi} &= \bar{\psi}_0 + \bar{\psi}_1 \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\Rightarrow Z(j_\varphi; j_\epsilon^\dagger, j_\epsilon; \bar{j}_\psi, j_\psi) = e^{\frac{i}{\hbar} \int d^4x \left\{ \mathcal{L}(\varphi_0; \epsilon_0, \epsilon_0^\dagger; \psi_0, \bar{\psi}_0) + j_\varphi^T \cdot \varphi_0 + j_\epsilon^\dagger \cdot \epsilon_0 + \epsilon_0^\dagger \cdot j_\epsilon + \bar{j}_\psi \cdot \psi_0 + \bar{\psi}_0 \cdot j_\psi \right\}} \cdot \int \mathcal{D}\varphi_1 \mathcal{D}\epsilon_1^\dagger \mathcal{D}\epsilon_1 \mathcal{D}\bar{\psi}_1 \mathcal{D}\psi_1 \quad (3.23)$$

$$\cdot \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int d^4 x \left\{ (\varphi_1^T, \epsilon_1^T, \epsilon_1^\dagger, \psi_1^T, \psi_1^\dagger) \cdot \frac{1}{2} \mathcal{H}|_S \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \epsilon_1 \\ \epsilon_1^* \\ \psi_1 \\ \psi_1^* \end{pmatrix} \right. \right. \\ \left. \left. + O(\gamma_i^T \cdot \gamma_j; \gamma_i, \gamma_j \in \{\varphi_1, \epsilon_1, \epsilon_1^*, \psi_1, \psi_1^*\}) \right\} \right\}$$

mit der verallgemeinerten Matrix

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} M_{\varphi\varphi} & M_{\varphi\epsilon} & M_{\varphi\epsilon^*} & M_{\varphi\psi} & M_{\varphi\psi^*} \\ M_{\epsilon\varphi} & M_{\epsilon\epsilon} & M_{\epsilon\epsilon^*} & M_{\epsilon\psi} & M_{\epsilon\psi^*} \\ M_{\epsilon^*\varphi} & M_{\epsilon^*\epsilon} & M_{\epsilon^*\epsilon^*} & M_{\epsilon^*\psi} & M_{\epsilon^*\psi^*} \\ M_{\psi\varphi} & M_{\psi\epsilon} & M_{\psi\epsilon^*} & M_{\psi\psi} & M_{\psi\psi^*} \\ M_{\psi^*\varphi} & M_{\psi^*\epsilon} & M_{\psi^*\epsilon^*} & M_{\psi^*\psi} & M_{\psi^*\psi^*} \end{pmatrix}; \quad (3.24)$$

$$M_{\beta\gamma}(x) \cdot \delta^{(4)}(x-y) := \frac{\delta}{\delta\beta^T(x)} \frac{\delta}{\delta\gamma(y)} \int d^4 x \mathcal{L}(\dots) \cdot \begin{cases} (-1) & \beta, \gamma \in \{\psi, \psi^*\} \\ (+1) & \text{sonst} \end{cases} \\ \beta, \gamma \in \{\varphi, \epsilon, \epsilon^*, \psi, \psi^*\}$$

wobei noch

$$(M_{\beta\gamma})^T = M_{\gamma\beta} \cdot \begin{cases} (-1) & \beta \vee \gamma \in \{\psi, \psi^*\} \\ (+1) & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.25)$$

gilt ($\partial_\alpha^T = -\bar{\partial}_\alpha$).

Natürlich fehlen in (23) Glieder, die in den Feldfluktuationen $\varphi_1, \epsilon_1, \psi_1, \epsilon_1^\dagger, \bar{\psi}_1$ linear sind, weil die Taylor-Reihe die stationäre Feldanordnung S als Mittelpunkt besitzt. Gewöhnlich sind die Untermatrizen $M_{\beta\gamma}$ Raum-Zeit-Differentialoperatoren, und hängen von der Feldkonfiguration S ab. Bei ihrer Definition haben wir schon berücksichtigt, daß $\psi, \bar{\psi}$ aus antivertauschenden Feldvariablen bestehen.

Wir gehen zunächst auf die $\hbar$ -Entwicklung des erzeugenden Funktional

$$\frac{1}{\hbar} G_c(j_\varphi; j_\epsilon^\dagger, j_\epsilon; \bar{j}_\psi, j_\psi) = \ln Z(j_\varphi; j_\epsilon^\dagger, j_\epsilon; \bar{j}_\psi, j_\psi)$$

ein, da seine Legendre-Transformation zum erzeugenden Funktional

$$\Gamma(\varphi; \epsilon, \epsilon^\dagger; \psi, \bar{\psi})$$

der eigentlichen Green-Funktionen führt (siehe (4)). Wir erleichtern uns die Aufgabe, wenn wir die gemeinsame Umskalierung

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \epsilon \\ \epsilon^\dagger \\ \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix} \mapsto \sqrt{\hbar} \cdot \begin{pmatrix} \varphi \\ \epsilon \\ \epsilon^\dagger \\ \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

vornehmen. Das Maß der Pfadintegration sehen wir stets als bis auf einen konstanten Faktor bestimmt an, der am Schluß aus der Normierungsbedingung für Z (vgl. (19)) deutlich wird.

Mehrfache quadratische Ergänzung liefert

$$\frac{1}{2} (\varphi_1^T, \epsilon_1^T, \epsilon_1^\dagger, \psi_1^T, \psi_1^\dagger) \cdot \mathcal{H} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \epsilon_1 \\ \epsilon_1^* \\ \psi_1 \\ \psi_1^* \end{pmatrix} = \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \varphi_2^T M_{\varphi\varphi} \varphi_2 + \frac{1}{2} \cdot (\epsilon_2^T, \epsilon_2^\dagger) \cdot \begin{pmatrix} \tilde{M}_{\epsilon\epsilon} & \tilde{M}_{\epsilon\epsilon^*} \\ \tilde{M}_{\epsilon^*\epsilon} & \tilde{M}_{\epsilon^*\epsilon^*} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \epsilon_2 \\ \epsilon_2^* \end{pmatrix} \\ & + \frac{1}{2} \cdot (\psi_1^T, \psi_1^\dagger) \cdot \begin{pmatrix} \tilde{M}_{\psi\psi} & \tilde{M}_{\psi\psi^*} \\ \tilde{M}_{\psi^*\psi} & \tilde{M}_{\psi^*\psi^*} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_1^* \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dabei gebrauchen wir einige Abkürzungen:

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{\beta\gamma} &:= M_{\beta\gamma} - M_{\beta\varphi} M_{\varphi\varphi}^{-1} M_{\varphi\gamma} \quad (\beta, \gamma \in \{\epsilon_1, \epsilon_1^\dagger, \psi_1, \psi_1^*\}) \\ \begin{pmatrix} \tilde{M}_{\psi\psi} & \tilde{M}_{\psi\psi^*} \\ \tilde{M}_{\psi^*\psi} & \tilde{M}_{\psi^*\psi^*} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \tilde{M}_{\psi\psi} & \tilde{M}_{\psi\psi^*} \\ \tilde{M}_{\psi^*\psi} & \tilde{M}_{\psi^*\psi^*} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$- \begin{pmatrix} \tilde{M}_{\psi\epsilon} & \tilde{M}_{\psi\epsilon^*} \\ \tilde{M}_{\psi^*\epsilon} & \tilde{M}_{\psi^*\epsilon^*} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{M}_{\epsilon\epsilon} & \tilde{M}_{\epsilon\epsilon^*} \\ \tilde{M}_{\epsilon^*\epsilon} & \tilde{M}_{\epsilon^*\epsilon^*} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{M}_{\epsilon\psi} & \tilde{M}_{\epsilon\psi^*} \\ \tilde{M}_{\epsilon^*\psi} & \tilde{M}_{\epsilon^*\psi^*} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \varphi_1 + M_{\varphi\varphi}^{-1} \{ M_{\varphi\epsilon} \cdot \epsilon_1 + M_{\varphi\epsilon^*} \cdot \epsilon_1^\dagger + M_{\varphi\psi} \cdot \psi_1 + M_{\varphi\psi^*} \cdot \psi_1^* \} \\ \begin{pmatrix} \epsilon_2 \\ \epsilon_2^* \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_1^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{M}_{\epsilon\epsilon} & \tilde{M}_{\epsilon\epsilon^*} \\ \tilde{M}_{\epsilon^*\epsilon} & \tilde{M}_{\epsilon^*\epsilon^*} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{M}_{\epsilon\psi} & \tilde{M}_{\epsilon\psi^*} \\ \tilde{M}_{\epsilon^*\psi} & \tilde{M}_{\epsilon^*\psi^*} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_1^* \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Umskalierung (26) hat gezeigt, daß bis zur gewünschten $\hbar$ -Ordnung nur die quadratische Form im Exponenten des Funktionalintegrals (23) berücksichtigt werden muß. Aus (27) erkennen wir, daß das Pfadintegral in mehrere Gauß-Integrale faktorisiert, wovon eines antikommutierende Variable enthält. Die Formeln (10) bzw. (14) dürfen auf den Fall der unendlich-dimensionalen, funktionalen Integration verallgemeinert werden. Statt der Determinanten von Darstellungsmatrizen der jeweiligen quadratischen Formen treten jetzt jedoch deren Quadratwurzeln auf, weil in (27) die Spalten-, Zeilenvektoren Realitätsbedingungen einhalten.

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} -i G_c(j_\varphi; j_\epsilon^\dagger, j_\epsilon; \bar{j}_\psi, j_\psi) &= \\ & \int d^4x \left\{ \mathcal{L}(\varphi_0; \epsilon_0, \epsilon_0^\dagger; \psi_0, \bar{\psi}_0) + j_\varphi^T \cdot \varphi_0 + \epsilon_0^\dagger \cdot j_\epsilon + \bar{j}_\psi \cdot \psi_0 + \bar{\psi}_0 \cdot j_\psi \right\} \\ & + \frac{i}{2} \hbar \left\{ \text{Tr} \ln(M_{\varphi\varphi}|_S) + \text{Tr} \ln \left(\begin{pmatrix} \tilde{M}_{\epsilon\epsilon} & \tilde{M}_{\epsilon\epsilon^*} \\ \tilde{M}_{\epsilon^*\epsilon} & \tilde{M}_{\epsilon^*\epsilon^*} \end{pmatrix} \Big|_S \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$- \text{Tr} \ln \left(\begin{pmatrix} \hat{M}_{\psi\psi} & \hat{M}_{\psi\psi^*} \\ \hat{M}_{\psi^*\psi} & \hat{M}_{\psi^*\psi^*} \end{pmatrix} \Big|_S \right) + \text{const} \Big\} + O(\hbar^2)$$

mit der Normierung $G_c(j_\varphi = 0; j_\epsilon^\dagger = 0, j_\epsilon = 0; \bar{j}_\psi = 0, j_\psi = 0) = 0$

wozu wir die Identität

$$\ln(\text{Det} A) = \text{Tr}(\ln A) \quad (3.30)$$

verwendet haben. Wir kümmern uns hier nicht um die vielleicht notwendige Regularisierung und Renormierung der $\text{Tr} \ln$ -Funktionale.

Es fehlt noch die Legendre-Transformation (4) ; anhand von (5) , (21), (29) überzeugen wir uns, daß die den Quellen zugeordneten c-Zahl-Felder $\varphi_c, \epsilon_c, \epsilon_c^\dagger, \psi_c, \bar{\psi}_c$ von den stationären Konfigurationen jeweils nur um $O(\hbar)$ abweichen. Wegen (21) muß auch

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}(\varphi_0; \epsilon_0, \epsilon_0^\dagger; \psi_0, \bar{\psi}_0) - \mathcal{L}(\varphi_c; \epsilon_c, \epsilon_c^\dagger; \psi_c, \bar{\psi}_c) \\ & + j_\varphi^T(\varphi_0 - \varphi_c) + j_\epsilon^T(\epsilon_0 - \epsilon_c) + (\epsilon_0 - \epsilon_c)^\dagger \cdot j_\epsilon + \bar{j}_\psi(\psi_0 - \psi_c) + (\bar{\psi}_0 - \bar{\psi}_c)j_\psi \\ & = O(\hbar^2) \end{aligned}$$

gelten.

Folgende Näherung für die effektive Wirkung Γ konnte somit hergeleitet werden:

$$\begin{aligned} \Gamma(\varphi_c; \epsilon_c, \epsilon_c^\dagger; \psi_c, \bar{\psi}_c) &= \int d^4x \mathcal{L}(\varphi_c; \epsilon_c, \epsilon_c^\dagger; \psi_c, \bar{\psi}_c) \\ &+ \frac{i\hbar}{2} \left\{ \text{Tr} \ln(M_{\varphi\varphi}|_c) + \text{Tr} \ln \left(\begin{pmatrix} \tilde{M}_{\epsilon\epsilon} & \tilde{M}_{\epsilon\epsilon^*} \\ \tilde{M}_{\epsilon^*\epsilon} & \tilde{M}_{\epsilon^*\epsilon^*} \end{pmatrix} \Big|_c \right) \right. \\ &\quad \left. - \text{Tr} \ln \left(\begin{pmatrix} \hat{M}_{\psi\psi} & \hat{M}_{\psi\psi^*} \\ \hat{M}_{\psi^*\psi} & \hat{M}_{\psi^*\psi^*} \end{pmatrix} \Big|_c \right) + \text{const} \right\} + O(\hbar^2) \\ &\quad (f(\phi)|_c \equiv f(\phi_c) \text{ etc.}) \end{aligned} \quad (3.31)$$

Wir weisen darauf hin, daß es sich bei ψ_c und $\bar{\psi}_c$ um Grassmann c-Zahlen handelt.

3.3. $\hbar$ -QUANTENKORREKTUR DER SUBKANONISCHEN WIRKUNG MIT VERBUNDFELD A^μ

Wir betrachten die bilinearisierte Polfeldform (2.96) der subkanonischen Lagrangedichte $\mathcal{L}_b$, deren funktionale Ableitungen zweiter Ordnung zunächst ermittelt werden (vgl. (24)):

$$\begin{aligned}
 M_{\varphi\varphi} &= \begin{pmatrix} 0 & \eta^{\mu\nu} \\ \eta^{\mu\nu} & 0 \end{pmatrix} \\
 M_{\psi^\bullet\psi} &= \gamma^0 (\underline{\epsilon} \cdot (i\vec{\partial} - \underline{A} - \underline{m}) - b_0 \chi \underline{h}) \\
 M_{\psi\psi^\bullet} &= C \cdot \{ (i\vec{\partial} + \underline{A} - \underline{m}) \underline{\epsilon} + \chi \underline{h} \cdot b_0 \} \gamma^0 \cdot C^{-1} \\
 C &: \text{Ladungskonjugationsmatrix} \\
 M_{\varphi\psi} &= \begin{pmatrix} -\bar{\psi} \gamma^\mu \underline{\epsilon} \\ -b_0 \cdot \bar{\psi} \gamma^\mu \underline{h} \end{pmatrix} & M_{\psi\varphi} &= -(M_{\varphi\psi})^T \\
 M_{\psi^\bullet\varphi} &= (-\underline{\epsilon} \gamma^0 \gamma^\mu \psi, -b_0 \gamma^0 \gamma^\mu \underline{h} \psi) & M_{\varphi\psi^\bullet} &= -(M_{\psi^\bullet\varphi})^T
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

Dabei erscheinen in (2.96) die folgenden Feldvektoren:

$$\varphi = \begin{pmatrix} A_\mu \\ \lambda_\mu \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \psi &= (\psi_A) \quad (A \in \{M, \Lambda, -\Lambda\}) \\ \psi^\bullet &= (\psi_A^*) \end{aligned}$$

Die übrigen Ableitungsmatrizen $M_{\beta\gamma}$ ($\beta \vee \gamma \in \{\epsilon, \epsilon^*\}$) sowie $M_{\psi\psi}, M_{\psi^\bullet\psi^\bullet}$ kommen bei unserer Modell-Lagrangedichte gar nicht vor.

(31) führt zur gesuchten Quantenkorrektur:

$$\begin{aligned}
 \Gamma(A_\mu, \lambda_\mu; \psi, \bar{\psi}) - \int d^4x \mathcal{L}_b &= \\
 -i \frac{\hbar}{2} \text{Tr} \ln \left\{ \begin{pmatrix} 0 & M_{\psi\psi^\bullet} \\ M_{\psi^\bullet\psi} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} M_{\psi\varphi} \\ M_{\psi^\bullet\varphi} \end{pmatrix} \cdot M_{\varphi\varphi}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} M_{\varphi\psi} & M_{\varphi\psi^\bullet} \end{pmatrix} \right\} \\
 + \hbar \cdot \text{const} + O(\hbar^2)
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

Einige nützliche Umformungen erleichtern später die physikalische Deutung der Störungsentwicklung des $\text{Tr} \ln$ -Funktionals. (30) zeigt, daß

$$\text{Tr} \ln(A \cdot B) = \text{Tr} \ln A + \text{Tr} \ln B$$

besteht; außerdem beachten wir, daß aufgrund ihres Inhalts die Matrizen $M_{\psi\varphi}, M_{\psi^\bullet\varphi}, M_{\varphi\psi}, M_{\varphi\psi^\bullet}$ gegenseitig antivertauschen.

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \Gamma(A_\mu, \lambda_\mu; \psi, \bar{\psi}) - \int d^4x \mathcal{L}_b &= -\frac{i\hbar}{2} \left\{ \text{Tr} \ln \begin{pmatrix} 0 & M_{\psi\psi^\bullet} \\ M_{\psi^\bullet\psi} & 0 \end{pmatrix} \right. \\
 &\quad \left. - \text{Tr} \ln \left(1 - M_{\varphi\varphi}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} M_{\varphi\psi} & M_{\varphi\psi^\bullet} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & M_{\psi^\bullet\psi}^{-1} \\ M_{\psi\psi^\bullet}^{-1} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M_{\psi\varphi} \\ M_{\psi^\bullet\varphi} \end{pmatrix} \right) \right\} \\
 &\quad + \hbar \cdot \text{const} + O(\hbar^2) \\
 &= -\frac{i\hbar}{2} \left(\text{Tr} \ln \left(\frac{1}{(i\vec{\partial} - \underline{m}) \underline{\epsilon}} \cdot K_+ \right) + \text{Tr} \ln \left(\frac{1}{(i\vec{\partial} - \underline{m}) \underline{\epsilon}} \cdot K_- \right) \right) \\
 &\quad + \frac{i\hbar}{2} \text{Tr} \ln \left(1 - M_{\varphi\varphi}^{-1} \cdot (R + R^T) \right) \\
 &\quad + \hbar \cdot \text{const} + O(\hbar^2)
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\text{mit } R = M_{\varphi\psi} \cdot M_{\psi^*\psi}^{-1} \cdot M_{\psi^*\varphi} \quad (3.35)$$

$$= \begin{pmatrix} \bar{\psi}\gamma_{\underline{K}_+} \frac{1}{\underline{K}_+} \otimes \underline{\epsilon}\gamma\psi & b_0\bar{\psi}\gamma_{\underline{K}_+} \frac{1}{\underline{K}_+} \otimes \gamma_{\underline{h}}\psi \\ b_0\bar{\psi}\gamma_{\underline{K}_+} \frac{1}{\underline{K}_+} \otimes \underline{\epsilon}\gamma\psi & b_0^2\bar{\psi}\gamma_{\underline{K}_+} \frac{1}{\underline{K}_+} \otimes \gamma_{\underline{h}}\psi \end{pmatrix}$$

$$K_+ = (i\partial - \not{A} - \underline{m}) \cdot \underline{\epsilon} - b_0 \not{\chi}_{\underline{h}}$$

$$K_- = (i\partial + \not{A} - \underline{m}) \cdot \underline{\epsilon} + b_0 \not{\chi}_{\underline{h}}$$

Die Regularisierung der beiden Tr ln -Funktionale lassen wir an dieser Stelle offen. (34) enthält alle effektiven Wechselwirkungen der Ordnung $\hbar$, welche die subkanonische Spinorthetheorie (2.96) ermöglicht. Oder: $i \cdot (\Gamma(A_\mu, \lambda_\nu; \psi, \bar{\psi}) - \mathcal{L}_b)$ liefert alle Amplituden, deren zugeordnete Feynman-Diagramme (ohne äußere Beine) 1-Teilchen-irreduzibel sind und von genau einer Propagatorschleife durchzogen werden.

Davon überzeugt man sich anhand der Taylor-Entwicklung der ln -Funktionale um die Konfiguration $A_\mu = \lambda_\nu = 0$, $\bar{\psi} = 0$, $\psi = 0$.

$$\frac{\hbar}{2} \left\{ \text{Tr ln} \left(\frac{1}{(i\partial - \underline{m})_{\underline{\epsilon}}} K_+ \right) + \text{Tr ln} \left(\frac{1}{(i\partial - \underline{m})_{\underline{\epsilon}}} K_- \right) \right\} = \hbar \cdot \text{Tr ln} \left(\frac{1}{(i\partial - \underline{m})_{\underline{\epsilon}}} K_+ \right)$$

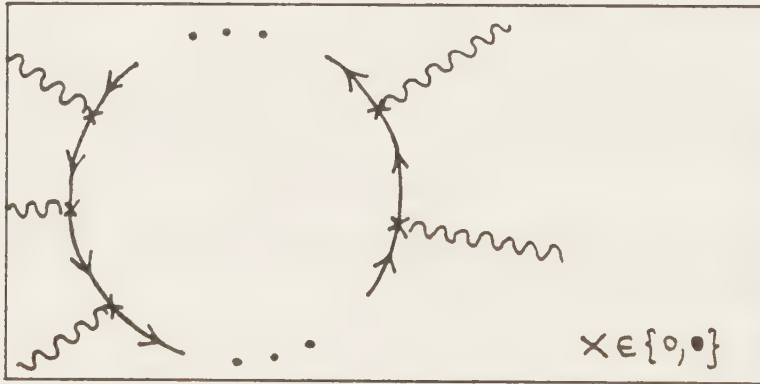


Abb. 2: Fermion-1-Schleifendiagramme für $\mathcal{L}_b$ mit äußeren Verbundfeld- und Multiplikatorfeldbeinen.

erzeugt die Amplituden zu den in Bild 2 skizzierten Diagrammen; dies schließt auch den Vorzeichenfaktor (-1) ein, welcher jeder Fermionschleife zugeordnet ist.

$$-\frac{\hbar}{2} \text{Tr ln} \left(1 - \frac{1}{M_{\varphi\varphi}} \cdot (R + R^T) \right)$$

kommt durch die in Bild 3 gezeigten Diagramme zustande; der Vorfaktor $(\frac{1}{2})$ wird während der Spurberechnung wieder ausgeglichen. Die beiden Beiträge niedrigster Ordnung spielten bereits eine Rolle als Quantenkorrekturen zum subkanonischen Propagator (vgl. Bild 1).

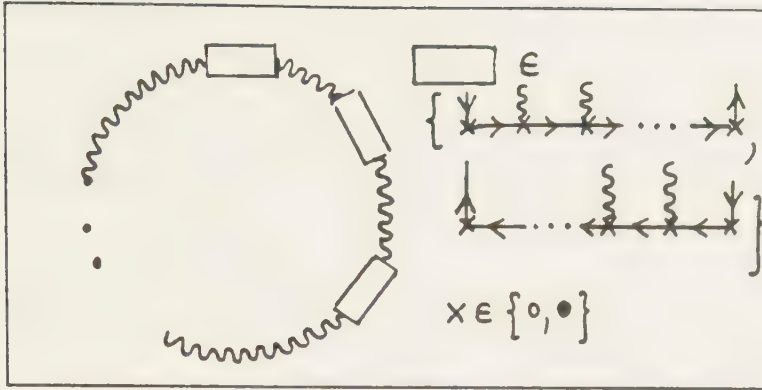


Abb. 3: Diese Diagramme verfügen über Kontaktpropagatoren $\in \{\text{Wellenlinie}, \text{Wellenlinie}\}$ entlang der Schleife. Als äußere Feldbeine sind A^μ, λ_ν und $\bar{\psi}_A, \psi_B$ (stets paarweise) möglich.

Eine wesentliche Vereinfachung wird möglich, falls ein kinematischer Bereich ausgesucht wurde, wo keine freien Polfelder erscheinen. Die effektive Wirkung hat dort folgende Bestandteile:

$$\Gamma(A_\mu, \lambda_\nu; ; 0, 0) = \int d^4x (\lambda^\mu \cdot A_\mu) + b_0 \cdot \int d^4x \lambda^\mu \langle 0 | T : \bar{\chi} \gamma_\mu \tilde{\chi} : | 0 \rangle \quad (3.36)$$

$$- i\hbar \cdot \text{Tr} \ln \left(\frac{1}{(i\partial - \underline{m}) \cdot \underline{\epsilon}} K_+ \right) + O(\hbar^2)$$

Häufig wird der Begriff der effektiven Wirkung in einer anderen Bedeutung verwendet. Falls eine Teilmenge $\hat{T} = \{\varphi_1, \dots\}$ der Felder, welche in der Lagrangedichte vertreten sind, nicht als ein-, auslaufende Teilchen verfügbar ist bzw. keinen großen Einfluß ausübt, kann man nach einer effektiven Beschreibung für die Dynamik der restlichen Felder $\in T = \{\eta_1, \dots\}$ suchen. Darin machen sich die $\hat{T}$ -Moden sicherlich als virtuelle Teilchen bemerkbar, wenn sie an Quantenkorrekturen der Propagatoren und Vertizes für T teilnehmen. Die so entstandene effektive Wirkung für T kann im Pfadintegral-Formalismus für die Green-Funktionen leicht überblickt werden. Man läßt lediglich die Quellterme der $\hat{T}$ -Felder beiseite und versucht die $\hat{T}$ -Funktionalintegration (geschlossen) auszuführen. Das verbleibende Funktionalintegral der ausgewählten Felder $\in T$ enthält die gesuchte effektive Wirkung S_{eff} in der Form

$$\int \mathcal{D}\eta_1 \dots \exp (iS_{eff}(\eta_1, \dots) + T\text{-Quellterme})$$

Der Exponent $S_{eff}(\eta_1, \dots)$ wird nach (2), (3) aus allen zusammenhängenden Vakuum-Greenfunktionen bezüglich der $\hat{T}$ -Felder gebildet, wobei die T -Moden als klassische, nicht quantisierte Hintergrundfelder erscheinen. Ein Vergleich mit (18) macht deutlich, daß $S_{eff}(\eta_1, \dots)$ die Rolle einer effektiven Wirkungsfunktion für die Quantenfelder aus T spielt.

Wir stellen nun noch den Zusammenhang mit dem erzeugenden Funktional $\Gamma(T, \hat{T})$ (siehe (4)) her. Dabei gehen wir von der Einschränkung aus, daß die ursprüngliche Lagrangedichte eine Bilinearform in $\hat{T}$ darstellt, Dieser wichtige Sonderfall wird in den späteren Kapiteln immer

vorliegen. Die Charakterisierung von G_c bzw. Γ als spezielle Klassen von Feynman-Diagrammen zeigt dann:

$$\mathcal{S}_{eff}(T_c) = \Gamma(T_c, \hat{T} = 0)|_{\hbar=0} + \hbar \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial \hbar}(T_c, \hat{T} = 0)|_{\hbar=0} \quad (3.37)$$

T_c bedeutet hier eine klassische Feldverteilung. Damit ist auch die effektive Wirkung $\mathcal{S}_{eff}(T)$ für Quantenfelder sofort bekannt.

4. Effektive Dynamik eines $U(1)$ -Eichfeldes aus subkanonischen Spinoren

4.1. BESTIMMUNG DER WECHSELWIRKUNGEN IN DER 1-SCHLEIFEN-NÄHERUNG

4.1.1. AUSINTEGRATION DER SPINORFREIHEITSGRADE

Ein $U(1)$ -Eichpotential A^μ wurde als Verbundfeld aus dem subkanonischen Dirac-Spinor $\tilde{\chi}$ konstruiert. Die freie Lagrangedichte (2.51a) des fundamentalen Feldes $\tilde{\chi}$ enthält partielle Ableitungen bis zur dritten Ordnung. Die entsprechend oft ausgeführte minimale Substitution $i\partial^\mu \rightarrow (i\partial^\mu - A^\mu)$, wobei A^μ nicht etwa eine unabhängige Konnektion bedeutet, sondern das Verbundfeld vertritt, sorgt für eine $U(1)$ -Eichinvarianz dieses nun selbstgekoppelten Spinormodells. Die Eigenschaft von A^μ , lediglich als Hilfsfeld zu wirken, geht aus der Zwangsbedingung (2.80) hervor, welche in Form eines Lagrange-Multiplikatorterms an der (klassischen) Wirkung beteiligt ist. Jederzeit kann das zusammengesetzte Feld A^μ durch sein bilineares Operatorprodukt ausgedrückt werden; dann werden die Spinorselbstwechselwirkungen des Modells deutlich, worin auch eine Kopplung von acht subkanonischen Feldern $\tilde{\chi}$ vorkommt. Im Gegensatz zur Quantenelektrodynamik (QED) fehlt bisher ein kinetischer Term des Vektorpotentials A^μ , wie ihn beispielsweise die Maxwell-Lagrangedichte $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ bietet.

Anstelle des Dimension- $(\frac{1}{2})$ -Feldes $\tilde{\chi}$ kann man auch mit den kanonischen Polfeldern $\psi_M, \psi_\Lambda, \psi_{-\Lambda}$ (vgl. Abschnitt 2.2) eine gleichwertige, in den Spinoren bilineare klassische Wirkung bereitstellen. Diese Lagrangedichten lauten:

$$\mathcal{L}_\chi = \bar{\tilde{\chi}}(i\partial - A - M)\{\Lambda^2 - (i\partial - A) \cdot (i\partial - A)\}\tilde{\chi} + \lambda_\mu(A^\mu - (8\pi^2):\bar{\tilde{\chi}}\gamma^\mu\tilde{\chi}:) \quad (4.1)$$

$$\mathcal{L}_\psi = \bar{\psi}_i(i\partial - A - m_i) \cdot \epsilon_i \psi_i + \lambda_\mu(A^\mu - (8\pi^2):\bar{\psi}_i\gamma^\mu\psi_j:h_{ij}:) \quad (4.2)$$

(jeder mehrfach auftretende Spektral-Index $i, j \in \{M, \Lambda, -\Lambda\}$ wird nach der Einstein-Konvention behandelt). Wir erinnern an die Linearkombination $\tilde{\chi} = \sum_A \psi_A \cdot \sqrt{|\tilde{\rho}_A|}$ (siehe (2.42a)) und die Definition der Matrix $h_{ij} = \sqrt{|\tilde{\rho}_i\tilde{\rho}_j|}$ mit den in (2.50) angegebenen speziellen Spektralparametern $\tilde{\rho}_i$; des weiteren gilt

$$\epsilon_M = 1 = -\epsilon_\Lambda = -\epsilon_{-\Lambda}$$

Das Multiplikatorvektorfeld nennen wir λ_μ ; Die Doppelpunktnotation $: \sim :$ verweist auf die Punkttrennungs-Regularisierung (2.79), die das inhomogene $U(1)$ -Transformationsverhalten $\delta(8\pi^2 : \bar{\tilde{\chi}}\gamma^\mu\tilde{\chi} :) = \partial^\mu \alpha$ ermöglichte. Die c -Zahl-Variation ergibt sich dabei aus einem Tadpole-Diagramm, wie schon in Abschnitt 2.4 besprochen wurde. Demnach kann die lokale Invarianz von $\mathcal{L}_\chi$ bzw. $\mathcal{L}_\psi$ unter Phasentransformationen nur dann gewährleistet sein, wenn als Folge der zweiten Quantisierung nichttriviale 1-Schleifen-Amplituden zur Verfügung stehen. Eine allein klassische

Deutung der äquivalenten Modelle (1), (2) ist nicht vereinbar mit ihrem Anspruch, eine Eichtheorie darzustellen.

Ohnehin ist es notwendig, Quantenkorrekturen systematisch einzubeziehen, damit die effektive Dynamik des Hilfsfeldes A^μ bestimmt werden kann. Einfache Verhältnisse liegen vor, falls man einen kinematischen Bereich auswählt, der zwar Teilchen zu einzelnen Verbundfeldern (hier also das Eichpotential) enthält, jedoch nicht Fermionen der Massen m_i , die den fundamentalen Diracfeldern ψ_i entsprechen. Dieser Fall tritt z. B. bei gegenüber den Massenschwellen M, Λ sehr kleinen Energieskalen auf. Die Polfelder ψ_i gehen lediglich als virtuelle Moden in physikalische Prozesse eines solchen Energiebereichs ein.

Das vorausgegangene Kapitel war der Pfadintegraldarstellung des erzeugenden Funktionals Z der Greenfunktionen gewidmet. Die geschlossene Funktionalintegration über antivertauschende fundamentale Spinorfelder ($\tilde{\chi}$ bzw. ψ_i) gelingt im Falle der Lagrangedichten (1), (2) wegen ihrer bilinearen Gestalt. Es ist außerdem unnötig, antivertauschende Spinorquellen vorzusehen, weil die Felder ψ_i bzw. $\tilde{\chi}$ an Wechselwirkungen bei niedrigen Energien nicht als ein-, auslaufende Teilchen mitwirken. Wenden wir Identitäten an, die in Abschnitt 3.2 bereitgestellt wurden, so erhalten wir eine effektive Wirkung für die gemeinsame Dynamik des Verbundfeldes A^μ und des Multiplikatorfeldes λ_μ .

Je nachdem, ob man (1) oder (2) zugrundelegt, lautet das Ergebnis (siehe auch (2.100))

$$\mathcal{S}_{eff}(A_\mu, \lambda_\nu) = \int d^4x \left(A^\mu \lambda_\mu + 8\pi^2 \lambda^\mu w_\mu(\xi) \right) - i \text{Tr} \ln \{ (i\partial - \cancel{A} - M) \cdot (\Lambda^2 - (i\partial - \cancel{A})(i\partial - \cancel{A})) - 8\pi^2 \cancel{\chi} \} \quad (4.3)$$

oder

$$\mathcal{S}_{eff}(A_\mu, \lambda_\nu) = \int d^4x \left(A^\mu \lambda_\mu + 8\pi^2 \lambda^\mu w_\mu \right) - i \text{Tr} \ln \{ (i\partial - \cancel{A} - \underline{m}) \cdot \underline{\xi} - 8\pi^2 \cancel{\chi} \underline{h} \} \quad (4.4)$$

Das $\text{Tr} \ln$ -Argument ist identisch mit dem Differentialoperator der jeweiligen Spinor-Feldgleichung. Dieser ist das Tensorprodukt einer unendlich dimensional Matrix in der Ortsraumdarstellung mit einer Matrix aus dem Diracspinor-Raum und —bei (4)— einer weiteren Matrix im Massenparameter-Raum. Wir wiederholen die Abkürzungen:

$$\begin{aligned} \underline{m} &= \text{diag}(M, \Lambda, -\Lambda) \\ \underline{\xi} &= \text{diag}(1, -1, -1) \\ (\underline{h})_{ij} &= \sqrt{|\tilde{e}_i \tilde{e}_j|} \end{aligned}$$

In beiden Fällen überstehen nur die Kontaktwechselwirkung $\int d^4x A^\mu \lambda_\mu$ und der Tadpole-Term (2.100) aus der Baumgraphen-Wirkung die Funktionalintegration unverändert. Der formale $\text{Tr} \ln$ -Ausdruck erhält einen Sinn, wenn nach Subtraktion des feldunabhängigen freien Funktionals die Potenzreihenentwicklung des Logarithmus, gegebenenfalls begleitet von einer Regularisierung der

Potenzen, durchgeführt wird. Die $\ln$ -Reihe aus (3) ist erheblich umfangreicher im Vergleich zu (4), da das Vektorpotential A^μ in mehreren Faktoren vertreten ist. Es erscheinen jedoch viele einander entgegengesetzte Beiträge in verschiedenen Ordnungen dieser Entwicklung, so daß am Ende genau die $\ln$ -Reihe aus (4) übrigbleibt. Die kombinatorischen Einzelheiten sind im Anhang A wiedergegeben. Deshalb befassen wir uns im Folgenden ausschließlich mit der Form (4) der effektiven Dynamik, die die Reihendarstellung

$$\mathcal{S}_{eff}(A_\mu, \lambda_\nu) = \int d^4x \left(A^\mu \lambda_\mu + 8\pi^2 \lambda_\mu w^\mu(\xi) \right) + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{Tr} \left(\frac{1}{i \not{\partial} - \underline{m}} (\not{A} + 8\pi^2 \not{\underline{h}} \underline{\epsilon}) \right)^n \Big|_{\text{reg}} \quad (4.5)$$

besitzt ($|_{\text{reg}}$ verlangt dabei eine geeignete Regularisierung). Die Spur wird am besten in der Impulsraumdarstellung erledigt, um den inversen Kern $(i \cdot \not{\partial} - \underline{m})^{-1}$ durch seine Eigenwertmatrix zu ersetzen:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{eff}(A_\mu, \lambda_\nu) = & \int \frac{d^4p}{N} A^\mu(p) \lambda_\mu(-p) + 8\pi^2 \lambda_\mu(0) \cdot w^\mu(\xi) + \dots \\ & + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \underbrace{\int \dots \int}_{n\text{-mal}} \frac{d^4p_1 \dots d^4p_n}{N^{n-1}} \delta^{(4)}\left(\sum_{i=1}^n p_i\right) \\ & \cdot \int \frac{d^4l}{N} \text{tr}_{D,F} \left(\prod_{j=1}^n \left\{ \frac{1}{l + \sum_{k=1}^j \not{p}_k - \underline{m}} (\not{A}(p_j) + 8\pi^2 \not{\underline{h}} \underline{\epsilon}(p_j)) \right\} \right) \Big|_{\text{reg}} \\ & (N = (2\pi)^4) \end{aligned} \quad (4.6)$$

(die Spurbildung konnte auf den endlich-dimensionalen Dirac-Raum und Spektral- bzw. Flavour-Raum eingeschränkt werden; bei Feldern mit Impulsargumenten p_i handelt es sich um Fouriertransformierte der zugehörigen Raum-Zeit-Felder)

Die Beseitigung der 4-Spinor-Selbstwechselwirkung durch eine einzige Lagrangemultiplikatorbedingung für ein Verbundfeld A^μ , so daß (2) entsteht, ist sicher willkürlich gewesen. Eigentlich liegt es auf der Hand, zuerst das Skalarprodukt

$$-8\pi^2 \bar{\psi}_i \epsilon_i \gamma^\mu \psi_i(x) \cdot \lim_{\xi \rightarrow 0} : \bar{\psi}_j(x-) \gamma_\mu \psi_k(x+) : h_{jk}$$

mittels einer Fierz-Transformation zu symmetrisieren, wobei auch neue skalare, pseudoskalare, vektorielle und axiale Spinor-Bilineare gebildet werden, welche nebenbei noch Matrizen im Massenparameter-Raum darstellen. Erst wenn man damit neue Verbundfelder definiert und zugeordnete Lagrange-Multiplikatoren eingeführt hat, kann das Spinormodell in einer zu (2) ähnlichen Form wiedergegeben werden. Der Vorschlag, die Behandlung der effektiven Dynamik so zu beginnen, stammt von Konisi und Takahasi [13].

In unserem Fall haben die Selbstwechselwirkungen noch eine weitere Aufgabe übernommen: sie sollen die $U(1)$ -Eichinvarianz des Spinormodells sicherstellen. Leider geht diese Eigenschaft während einer Fierz-Symmetrisierung verloren, wenn man wie bisher darauf besteht, daß sich das inhomogene Transformationsverhalten wieder als Folge der nichtlokalen Punkttrennungs-Regularisierung einstellt. Eine zusätzliche Schwierigkeit zeichnet sich bei der Berechnung der verschiedenen induzierten 1-Loop-Diagramme ab. Die Konvergenzaussichten, welche wir im folgenden Abschnitt zu besprechen haben, werden ungünstiger, da die Spektralmatrix $h_{ij} = \sqrt{|\tilde{\epsilon}_i \tilde{\epsilon}_j|}$ mit den neu entstandenen Verbundfeldern kontrahiert sein wird.

4.1.2. DIE REGULARISIERUNG DER EFFEKTIVEN WIRKUNG

Bevor wir einige der in (6) enthaltenen 1-Schleifen-Wechselwirkungen explizit berechnen, ist es angebracht, auf die Regularisierung der Amplituden mit Divergenzgrad $D \geq 0$ einzugehen. Der reine Eichfeldsektor

$$S_{eff}(A_\mu, 0) = -i \sum_j \text{Tr} \ln(i\partial - \mathcal{A} - m_j) \quad (4.7)$$

besteht aus denselben Fermion-1-Schleifen-Wechselwirkungen, die schon von der QED dreier gleichstark geladener ($e = 1$) Diracfelder ψ_i mit Massenspektrum $\underline{m}$ her bekannt sind. Hier empfiehlt sich das in Anhang B vorgestellte Pauli-Villars-Verfahren. Denn wegen der Bedingungen (2.40) gelingt es den Polfeldern der Spinortheorie nicht, diesen Sektor vollständig zu regularisieren. Weil alle Dirac-Spuren in den Amplituden der QED auf Funktionen der Massenquadratur m_i^2 allein führen, kommen wir mit je zwei Regulatorfeldern $\psi_i^{(s)}$ ($s \in \{1, 2\}$, Massenparameter $\overline{\Lambda}_i^{(s)}$, Pauli-Villars-Gewichte $\overline{\rho}_i^{(s)}$) für jedes Diracfeld ψ_i zurecht, die den beiden PV-Bedingungen (vgl. (B.6))

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = 1 + \overline{\rho}_i^{(1)} + \overline{\rho}_i^{(2)} \\ 0 = m_i^2 + \overline{\rho}_i^{(1)} (\overline{\Lambda}_i^{(1)})^2 + \overline{\rho}_i^{(2)} (\overline{\Lambda}_i^{(2)})^2 \end{array} \right\} \quad i \in \{M, \Lambda, -\Lambda\} \quad (4.8)$$

genügen.^[12] Die weitere Eigenschaft der QED, unter der diskreten Ladungskonjugationsoperation invariant zu sein, schließt effektive Wechselwirkungen einer ungeraden Anzahl von Photonfeldern $A^\mu(x)$ aus (Furry-Theorem). Die QED-Beweistechnik kann auf den Fall einer ungeraden Gesamtzahl äußerer Felder A^μ , λ_μ , die an den Vertizes eines Fermion-1-Schleifendiagramms einlaufen, verallgemeinert werden. Wir zeigen diese Ausdehnung des Furry-Theorems in Anhang C.1.

Eine beträchtliche Verringerung des oberflächlichen Divergenzgrades D findet statt, wenn 1-Loop-Diagramme äußere Multiplikatorfeld-Beine aufweisen. Sie ist eine Folge der Kopplung zwischen λ_μ und dem subkanonischen Spinorfeld $\tilde{\chi}$ (vgl. (1)), dessen Propagator (2.51b) verglichen mit dem Dirac-Propagator ($i/(\not{p} - m)$) zu einem um jeweils zwei Einheiten kleineren Divergenzgrad führt.

^[12]Die Regularisierung der Mode ψ_Λ kann auch für das Feld $\psi_{-\Lambda}$ übernommen werden.

Wir untersuchen dazu, wie sich die Spuren

$$\begin{aligned} \phi_{(k_1, \dots, k_s)}^{(s)} = & \text{tr}_{D, F} \left(\prod_{\sigma=1}^s \left\{ 8\pi^2 \underline{\hbar} \underline{\epsilon} \gamma^{\mu\sigma} \right. \right. \\ & \cdot \left. \prod_{\tau=1}^{k_\sigma} \left(\frac{1}{\not{l} + \not{p}_{(\sigma, \tau)} - \underline{m}} \gamma^{\nu_{\sigma, \tau}} \right) \frac{1}{\not{l} + \not{p}_{(\sigma)} - \underline{m}} \right\} \Bigg) \\ & (s \geq 1, k_\sigma \in \mathbb{N}_0; a_{(\sigma)}, b_{(\sigma, \tau)} \text{ konstant}) \end{aligned} \quad (4.9)$$

bei großen Werten des Schleifenimpulses l^μ verhalten. Nach (6) zeigen die Integranden des Loopintegrals einer effektiven Wechselwirkung, an der $s \geq 1$ Felder λ_μ und $\sum_{\sigma=1}^s k_\sigma = k$ Photonfelder teilnehmen, genau diese Struktur. Die Faktorisierung

$$\underline{\hbar} = v \cdot v^T \quad \text{mit} \quad v = \begin{pmatrix} \sqrt{|\tilde{\epsilon}_M|} \\ \sqrt{|\tilde{\epsilon}_A|} \\ \sqrt{|\tilde{\epsilon} - \Lambda|} \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

gestattet zusammen mit der zyklischen Eigenschaft $\text{tr}(A \cdot B) = \text{tr}(B \cdot A)$, die Massenparameter-Spur in (9) auszuwerten:

$$\phi_{(k_1, \dots, k_s)}^{(s)} = \text{tr}_D \left(\prod_{\sigma=1}^s (8\pi^2) \gamma^{\mu\sigma} \cdot \left\{ \sum_A \tilde{\epsilon}_A \prod_{\tau=1}^{k_\sigma} \left(\frac{1}{\not{l} + \not{p}_{(\sigma, \tau)} - m_A} \gamma^{\nu_{\sigma, \tau}} \right) \cdot \frac{1}{\not{l} + \not{p}_\sigma - m_A} \right\} \right) \quad (4.11)$$

(Darin entsteht $\tilde{\epsilon}_A$ als Produkt $\epsilon_A \sqrt{|\tilde{\epsilon}_A|} \sqrt{|\tilde{\epsilon}_A|}$) Sobald die Propagatorennenner rationalisiert sind, können wir eine asymptotische Entwicklung der Spektralsumme für große Werte $|l^\mu|, |l^2|$ vornehmen (daneben gehen wir noch von $|l^2| \geq \max_\mu \{|l^\mu|\}$ aus):

$$\begin{aligned} & \sum_A \tilde{\epsilon}_A \prod_{\tau=1}^{k_\sigma} \left(\frac{1}{\not{l} + \not{p}_{(\sigma, \tau)} - m_A} \gamma^{\nu_{\sigma, \tau}} \right) \frac{1}{\not{l} + \not{p}_\sigma - m_A} \xrightarrow{|l^2| \rightarrow \infty} \\ & \sum_A \tilde{\epsilon}_A \prod_{\tau=1}^{k_\sigma} \left(\frac{\not{l} + \not{p}_{(\sigma, \tau)} + m_A}{l^2} \cdot \left\{ 1 + \frac{m_A^2 - b_{(\sigma, \tau)}^2 - 2l \cdot b_{(\sigma, \tau)}}{l^2} + o\left(\frac{1}{\sqrt{|l^2|}}\right) \right\} \cdot \gamma^{\nu_{\sigma, \tau}} \right) \\ & \cdot \frac{\not{l} + \not{p}_\sigma + m_A}{l^2} \cdot \left(1 + \frac{m_A^2 - a_\sigma^2 - 2l \cdot a_\sigma}{l^2} + o\left(\frac{1}{\sqrt{|l^2|}}\right) \right) \\ & = \left(\sum_A \tilde{\epsilon}_A \right) \cdot \left\{ o\left(\frac{1}{\sqrt{|l^2|}^{k_\sigma}}\right) \right\} + \left(\sum_A \tilde{\epsilon}_A m_A \right) \cdot \left\{ o\left(\frac{1}{\sqrt{|l^2|}^{k_\sigma+1}}\right) \right\} + o\left(\frac{1}{\sqrt{|l^2|}^{k_\sigma+2}}\right) \\ & = o\left(\frac{1}{\sqrt{|l^2|}^{k_\sigma+2}}\right) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Die beiden Spektralbedingungen $\sum_A \tilde{\epsilon}_A = 0, \sum_A \tilde{\epsilon}_A \cdot m_A = 0$ (siehe (2.40)) beschleunigen hier das ultraviolette Abfallen solcher Spektralsummen. Sie stellen ja sicher, daß die Linearkombination $\sum_A \sqrt{|\tilde{\epsilon}_A|} \cdot \psi_A = \tilde{\chi}$ die subkanonische Dimension $\frac{1}{2}$ hat. Der Sonderfall $k_\sigma = 0$ in (12) liefert

dann auch den subkanonischen Propagator. In der subkanonischen Spinortheorie wird deshalb der Divergenzgrad der 1-Schleifen-Amplitude $\int d^4 l \phi_{k_1, \dots, k_s}^{(s)}$ schon gemäß

$$D \leq 4 - \sum_{\sigma=1}^s (k_{\sigma} + 3) = 4 - k - 3s \quad (4.13)$$

nach oben beschränkt. Hat die untersuchte effektive Wechselwirkung mindestens zwei λ_{μ} -Beine ($s \geq 2$) oder neben einem λ_{μ} -Bein mindestens zwei Photonfeldfaktoren $A^{\mu}(k \geq 2)$, dann sind die betreffenden Schleifenintegrale sicherlich konvergent. Nur die Ausnahmen ($s = 1, k_1 = 0$) und ($s = 1, k_1 = 1$), für die $D \leq 1$ bzw. $D \leq 0$ gilt, müssen regularisiert werden.

Wir erinnern daran, daß die Eichinvarianz von (2) entscheidend von der Punkttrennungs-Regularisierung

$$8\pi^2: \bar{\psi}_i \gamma^{\mu} \psi_j: h_{ij} = 8\pi^2 h_{ij} \lim_{\xi \rightarrow 0} \{ \bar{\psi}_i(x_-) \gamma^{\mu} \psi_j(x_+) - \langle 0 | T \bar{\psi}_i(x_-) \gamma^{\mu} \psi_j(x_+) | 0 \rangle \} \quad (4.14)$$

des zusammengesetzten Vektorpotentials abhängt. Die subtrahierte 2-Punkt-Greenfunktion enthält den im Grenzfall $\xi \rightarrow 0$ divergenten c -Zahl-Teil des regularisierten Spinorprodukts. Saller hat in [2] vorgeschlagen, dabei die 2-Punkt-Funktionen der freien Lagrangedichte für die Polfelder ψ_i zu benutzen (siehe auch Abschnitt 2.4):

$$8\pi^2: \bar{\psi}_i \gamma^{\mu} \psi_j: h_{ij} = \lim_{\xi \rightarrow 0} 8\pi^2 (h_{ij} \bar{\psi}_i(x_-) \gamma^{\mu} \psi_j(x_+) + i \int \frac{d^4 p}{N} \text{tr}(\sum_A \tilde{\psi}_A \frac{1}{\not{p} - m_A} \gamma^{\mu}) \cdot e^{-ip\xi}) \quad (4.15)$$

Als Begründung wird darauf hingewiesen, daß diese Näherung ausreiche, um ein endliches Operatorprodukt (14) zu gewinnen.

Der Nichtlokalität des Multiplikatoranteils der Lagrangedichte (2) wurde während der Pfadintegration

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi}_M \int \mathcal{D}\bar{\psi}_{\Lambda} \int \mathcal{D}\bar{\psi}_{-\Lambda}, \int \mathcal{D}\psi_M \int \mathcal{D}\psi_{\Lambda} \int \mathcal{D}\psi_{-\Lambda} e^{i \int d^4 x \mathcal{L}_{\psi}} = e^{i S_{eff}(A_{\mu}, \lambda_{\nu})}$$

über die Grassmann-Polfelder bisher keine Beachtung geschenkt. Wenn wir den Grenzprozeß $\lim_{\xi \rightarrow 0}$ mit den Funktionalintegralen vertauschen, dann können die erforderlichen Anpassungen leicht nachgeholt werden. Die unendlich dimensionale quadratische Form desjenigen Teils von $\mathcal{L}_{\psi}$, in den die Polfelder eingehen, lautet jetzt in der Ortsraumdarstellung:

$$\begin{aligned} & (i\partial - \not{A} - \underline{\underline{m}}) \underline{\underline{\epsilon}} \delta^{(4)}(x - y) - 8\pi^2 \not{\chi} \underline{\underline{h}} \delta(x - y + \xi) \\ & = \{ (i\partial - \not{A} - \underline{\underline{m}}) \cdot \underline{\underline{\epsilon}} - 8\pi^2 \not{\chi} \underline{\underline{h}} e^{\xi \overrightarrow{\partial} \cdot} \} \delta^{(4)}(x - y) \\ & = \langle x | (i\not{D} - \underline{\underline{m}}) \cdot \underline{\underline{\epsilon}} - 8\pi^2 \not{\chi} \underline{\underline{h}} e^{\xi \overrightarrow{\partial} / 2} | y \rangle \end{aligned} \quad (4.16)$$

Der Tayloroperator $e^{\vec{\xi}\partial}$ ist ein Lorentz-Skalar und verursacht eine Translation aller Argumente $x \rightarrow (x + \xi)$.^[13] Erneute Anwendung der Identität (3.14) führt schließlich auf die Punkttrennungs-regularisierte effektive Wirkung

$$\begin{aligned} S_{eff}(A_\mu, \lambda_\nu) = & \lim_{\xi \rightarrow 0} \left\{ -i \text{Tr} \ln(i\partial - \not{A} - \underline{m} - 8\pi^2 \not{\chi} \underline{h} \underline{\xi} e^{\vec{\xi}\partial/2}) \right. \\ & + \int d^4x (A^\mu \lambda_\mu) \\ & \left. - 8\pi^2 i \int d^4x \lambda_\mu \int \frac{d^4p}{N} \text{tr}_D \left(\sum_A \frac{\not{p} \not{A}}{p - m_A} \gamma^\mu \right) e^{-ip\xi} \right\} \end{aligned} \quad (4.17)$$

welche (4) ablöst. Wegen des c-Zahl-Subtraktionsterms aus (15) ist ein weiterer Baumgraphenterm aus $\mathcal{L}_\psi$ noch an S_{eff} beteiligt. Wiederholt man die Überlegungen auf dem Weg von (4) nach (6), so genügt es, in der Impulsraumdarstellung die Substitution

$$8\pi^2 \underline{h} \underline{\xi} \not{\chi}(p_j) \mapsto 8\pi^2 \underline{h} \underline{\xi} \not{\chi}(p_j) e^{-i\xi(l + \sum_{k=1}^{j-1} p_k + \frac{1}{2} p_j)} \quad (4.18)$$

am Multiplikator-“Vertex” vorzunehmen.

Demnach konvergiert die Quantenkorrektur, welche ohne Mitwirkung des Photonfeldes linear in λ_μ ist ($s = 1, k_1 = 0$), bei endlichen Splitvektoren ξ^μ . Die Berechnung ihres Schleifenintegrals kann unterbleiben, da der entsprechende

Baumgraphenbeitrag aus (17) die entgegengesetzte Größe besitzt. Natürlich überrascht uns dieses Ergebnis nicht, weil es gleichbedeutend mit der Subtraktion der Greenfunktion

$\langle 0 | T \bar{\psi}_i(x_-) \gamma^\mu \psi_j(x_+) | 0 \rangle$ in der Definition des Operatorprodukts (14) ist.

4.1.3. FORMALER BEWEIS DER EICHINVARIANZ VON S_{eff}

Das Schicksal des ursprünglichen Kontaktterms $\int d^4x \lambda_\mu A^\mu$ kann aufgeklärt werden, wenn wir uns von der Eichinvarianz der effektiven Wirkung (17) bei lokalen Umeichungen $A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \alpha$ überzeugt haben. Ehe der formale Beweis vorgestellt wird, ziehen wir schon die Schlußfolgerung, daß sich die 1-Schleifen-Korrektur der λ_μ - A_ν -Mischung im Falle eines konstanten Photon- wie Multiplikatorfeldes gegen den Baumgraphenterm weghebt. Sonst bietet sich nämlich mit (17) keine Möglichkeit, die Variation $\int d^4x \lambda_\mu \partial^\mu \alpha(x)$ zu beseitigen.

Da der Lagrangemultiplikator λ_μ durch eine Eichtransformation nicht betroffen wird, gilt:

$$\begin{aligned} S_{eff}(A_\mu, \lambda_\nu) & \mapsto S_{eff}(A_\mu + \alpha, \lambda_\nu) \\ & = \lim_{\xi \rightarrow 0} \left\{ -i \text{Tr} \ln(e^{-i\alpha(x)} (i\partial - \not{A} - \underline{m}) e^{i\alpha(x)} - 8\pi^2 \not{\chi} \underline{h} \underline{\xi} e^{\vec{\xi}\partial/2}) \right. \\ & \quad \left. + \int d^4x \lambda_\mu (A^\mu + \alpha'^\mu) \right\} \end{aligned} \quad (4.19)$$

[13] Das Multiplikatorfeld $\lambda_\mu(x)$ wird allerdings von diesem Operator nicht beeinflusst.

Dank der Identität^[14]

$$\begin{aligned} e^{\vec{\xi}\vec{\partial}/2} &= (e^{-i\alpha(x)} e^{i\alpha(x)}) e^{\vec{\xi}\vec{\partial}/2} (e^{-i\alpha(x)} e^{i\alpha(x)}) \\ &= e^{-i\alpha(x)} e^{\vec{\xi}\vec{\partial}/2} e^{i\alpha_-} \cdot e^{-i\alpha_+} e^{\vec{\xi}\vec{\partial}/2} e^{i\alpha(x)} \end{aligned} \quad (4.20)$$

(wobei $\langle x | \partial_\alpha f | y \rangle = \langle x | f \partial_\alpha | y \rangle + \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \cdot \delta(x - y)$ beachtet werden muß) und der Funktional-eigenschaft (3.30) wird daraus:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{eff}(A_\mu + \alpha_{,\mu}, \lambda_\nu) - \mathcal{S}_{eff}(A_\mu, \lambda_\nu) &= \overline{\lim}_{\xi \rightarrow 0} \left\{ \int d^4 x \lambda_\mu \alpha^{,\mu} \right. \\ &\quad - i \text{Tr} \ln(i\vec{\partial} - \underline{A} - \underline{m} - 8\pi^2 \underline{\chi} \underline{h} \underline{\epsilon} e^{i(\alpha_- - \alpha_+)} e^{\vec{\xi}\vec{\partial}/2}) \\ &\quad \left. + i \text{Tr} \ln(i\vec{\partial} - \underline{A} - \underline{m} - 8\pi^2 \underline{\chi} \underline{h} \underline{\epsilon} e^{\vec{\xi}\vec{\partial}/2}) \right\} \end{aligned} \quad (4.21)$$

In beiden $\text{Tr} \ln$ -Funktionalen soll der Taylor-Operator an seinen Nachbarfaktoren kommutieren können. Die Entwicklung des ersten dieser Funktionale um das Operator-Argument des zweiten führt zu:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{eff}(A_\mu + \alpha_{,\mu}, \lambda_\nu) - \mathcal{S}_{eff}(A_\mu, \lambda_\nu) &= \overline{\lim}_{\xi \rightarrow 0} \left\{ \int d^4 x (\lambda_\mu \alpha^{,\mu}) \right. \\ &\quad \left. - i \text{Tr} \left(\frac{1}{i\vec{\partial} - \underline{A} - \underline{m} - 8\pi^2 \underline{\chi} \underline{h} \underline{\epsilon} e^{\vec{\xi}\vec{\partial}/2}} \cdot (-8\pi^2 \underline{\chi} \underline{h} \underline{\epsilon} e^{\vec{\xi}\vec{\partial}/2} (e^{i(\alpha_- - \alpha_+)} - 1)) \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Die höheren Glieder der Logarithmus-Reihe enthalten ausnahmslos konvergente Fermion-1-Schleifenamplituden, selbst wenn der Splitvektor ξ^μ Null ist (der Nachweis fand bereits zwischen (9) und (13) statt). Sie fallen deshalb wegen

$(\exp(i \cdot (\alpha(x_-) - \alpha(x_+))) - 1) |_{\xi^\mu=0} = 0$ fort. Eine Wiederholung dieser Begründung erlaubt, (22) nochmals zu vereinfachen:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{eff}(A_\mu + \alpha_{,\mu}, \lambda_\nu) - \mathcal{S}_{eff}(A_\mu, \lambda_\nu) &= \overline{\lim}_{\xi \rightarrow 0} \left\{ \int d^4 x (\lambda_\mu \alpha^{,\mu}) \right. \\ &\quad - i \text{Tr} \left(\frac{1}{i\vec{\partial} - \underline{m}} (-8\pi^2 \underline{\chi} \underline{h} \underline{\epsilon} e^{\vec{\xi}\vec{\partial}/2} (e^{i(\alpha_- - \alpha_+)} - 1)) \right) \\ &\quad \left. - i \text{Tr} \left(\frac{1}{i\vec{\partial} - \underline{m}} \underline{A} \frac{1}{i\vec{\partial} - \underline{m}} \cdot (-8\pi^2 \underline{\chi} \underline{h} \underline{\epsilon} e^{\vec{\xi}\vec{\partial}/2} (e^{i(\alpha_- - \alpha_+)} - 1)) \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.23)$$

Die Spur, in welcher der A^μ -Vertex vertreten ist, enthält eine Amplitude mit dem Divergenzgrad $D = 0$. Aus Dimensionsgründen verhält sie sich deshalb bei einem infinitesimalen "Cutoff-Vektor" ξ_α entweder als $\ln(\xi^2)$ oder ist eine Konstante (bis auf einen Zusatzfaktor, der den Homogenitätsgrad 0 hat). Berücksichtigt man die übrigen ξ -abhängigen Faktoren, so wird klar, daß dieser

^[14] $\alpha_\pm = \alpha(x \pm \xi/2)$

Spurterm aus (23) entfernt werden kann. Der andere Spurbeitrag ist ein λ_μ -Tadpole; wir betrachten ihn in der Impulsraumdarstellung und erkennen bald die 2-Punkt-Greenfunktion aus (14):

$$\begin{aligned}
& \mathcal{S}_{eff}(A_\mu + \alpha_{,\mu}, \lambda_\nu) - \mathcal{S}_{eff}(A_\mu, \lambda_\nu) \\
&= \overline{\lim}_{\xi \rightarrow 0} \left\{ \int d^4x \lambda_\mu \cdot (\alpha'^\mu - 8\pi^2(e^{i(\alpha - \alpha')} - 1) \right. \\
&\quad \cdot \langle 0 | T \tilde{\chi}(x_-) \gamma^\mu \tilde{\chi}(x_+) | 0 \rangle_{1\text{-Loop}} \} \\
&= \int d^4x \lambda_\mu \left\{ \alpha'^\mu - 8\pi^2 \overline{\lim}_{\xi \rightarrow 0} \langle 0 | T \tilde{\chi}(x_-) \gamma^\mu \tilde{\chi}(x_+) | 0 \rangle + \langle 0 | T A^\mu | 0 \rangle \right\} \\
&= \int d^4x \lambda_\mu (\alpha'^\mu - \langle 0 | T (A^\mu + \alpha'^\mu) | 0 \rangle) = 0
\end{aligned} \tag{4.24}$$

$\tilde{\chi}$ bezeichnet hier das eichtransformierte subkanonische Spinorfeld). Die letzten Schritte sind fast selbstverständlich, da sie die Definition des zusammengesetzten A^μ -Feldes und seine Konnektions-Eigenschaft benutzen (siehe Abschnitt 2.4). Damit ist die lokale $U(1)$ -Invarianz der effektiven Wirkung (17) nachgewiesen.

4.1.4. KINETISCHE OPERATOREN AUF DEM 1-LOOP-NIVEAU

Nachdem der starke Einfluß der Quantenkorrekturen auf den bilinearen kinetischen Sektor festgestellt wurde, bestimmen wir mit Hilfe von (6) jeden der drei möglichen bosonischen Beiträge:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{eff}^{(2)} = \int \frac{d^4p}{N} \{ & \frac{1}{2} A_\mu(p) A_\nu(-p) \sigma_{AA}^{\mu\nu}(p) + \frac{1}{2} \lambda_\mu(p) \lambda_\nu(-p) \sigma_{\lambda\lambda}^{\mu\nu}(p) \\
& + A_\mu(p) \lambda_\nu(-p) \sigma_{A\lambda}^{\mu\nu}(p) \}
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Die betreffenden Amplituden sind regularisiert, was im letzten Abschnitt ausführlich erläutert wurde:

$$\sigma_{AA}^{\mu\nu} = i \sum_B \int \frac{d^4l}{N} \text{tr}_D(\mathcal{D}(l + p/2; m_B) \gamma^\mu \mathcal{D}(l - p/2; m_B) \gamma^\nu) |_{\text{PV}} \tag{4.26a}$$

$$\sigma_{\lambda\lambda}^{\mu\nu} = (8\pi^2)^2 i \int \frac{d^4l}{N} \sum_{B,C} \tilde{\epsilon}_B \tilde{\epsilon}_C \cdot \text{tr}_D(\mathcal{D}(l + p/2; m_B) \gamma^\mu \mathcal{D}(l - p/2; m_C) \gamma^\nu) \tag{4.26b}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{A\lambda}^{\mu\nu}(p) = & \eta^{\mu\nu} + 8\pi^2 i \overline{\lim}_{\xi \rightarrow 0} \left\{ \sum_B \tilde{\epsilon}_B \right. \\
& \left. \int \frac{d^4l}{N} \text{tr}_D(\mathcal{D}(l + p/2; m_B) \gamma^\mu \mathcal{D}(l - p/2; m_B) \gamma^\nu \cdot e^{-i\xi l}) \right\}
\end{aligned} \tag{4.26c}$$

$i \cdot \mathcal{D}(q; m)$ vertritt hierbei den Dirac-Propagator $i/(\not{q} - m)$.

Eine qualitative Besprechung dieser kinetischen Operatoren findet man z. B. bei Dürr (siehe [1]).

(26a) besteht aus der Superposition transversaler QED-Vakuumpolarisationen niedrigster Ordnung; die Fermionenmassen m_B in der Schleife gehen aus Sallers Massenspektrum (2.49) hervor. Die Berechnung dieses Feynman-Diagramms aus der QED kann in vielen Lehrbüchern der

Feldtheorie nachgelesen werden (siehe etwa: [5] S. 319 ff.), die Bedingungen an die PV-Regulatoren wurden in (8) genannt. $\Rightarrow$

$$\sigma_{AA}^{\mu\nu}(p) = \Pi^{\mu\nu} \cdot \frac{p^2}{12\pi^2} \left\{ \sum_B \bar{R}_B(0) + \sum_B \{ (w_B \operatorname{arccot} w_B - 1)(w_B^2 + 3) + \frac{1}{3} \} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} \bar{R}_B(0) = \bar{\ell}_B^{(1)} \ln \frac{(\bar{\Lambda}_B^{(1)})^2}{m_B^2} + \bar{\ell}_B^{(2)} \ln \frac{(\bar{\Lambda}_B^{(2)})^2}{m_B^2} \\ w_B = \sqrt{-1 + \frac{4m_B^2}{p^2}} \\ \Pi^{\mu\nu} = (\eta^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}) \end{array} \right\} \quad (4.27)$$

Der Gültigkeitsbereich erstreckt sich von $p^2 \rightarrow -\infty$ bis unterhalb der Massenschwelle bei $p^2 = \min_B \{4m_B^2\} = 4M^2$; die zusätzlichen Regulatormassen $\bar{\Lambda}_B^{(s)}$ ($s \in \{1, 2\}$) seien sehr groß im Vergleich zum Spektrum (2.49). Einfachere Ausdrücke gelten im Limes asymptotisch gleicher Massen $\bar{\Lambda}_B^{(s)} \rightarrow \bar{\Lambda}$ ($B \in \{M, \Lambda, -\Lambda\}$, $s \in \{1, 2\}$), der Gegenstand von Anhang B ist. Daß beide PV-Bedingungen (8) ein geradzahliges Massen-Moment (0. und 2. Ordnung) verwenden, erfordert eine geringfügige Anpassung beim Gebrauch von (B.9), (B.18):

$$\bar{R}_B(0) \longmapsto -\ln \left(\frac{\bar{\Lambda}^2}{m_B^2} \right) + 1 \quad (4.28)$$

Der kinetische Operator (26b) des Multiplikatorfelds λ_μ ist anders als (26a) von vornherein konvergent; außerdem wechseln sich in der Diracspur Propagatoren unterschiedlicher Massen m_A ab. Nach (2.48) läßt sich die mit $(\bar{\ell}_B \cdot \bar{\ell}_C)$ gewichtete Doppelsumme in eine einzige Spur mit subkanonischen Propagatoren (Dimension: -3) umformen. 't Hooft erwähnt, daß diese Amplitude eine die Eichinvarianz verletzende, aber durchaus legitime Regularisierung des Graphen der QED-Vakuumpolarisation darstellt (vgl. [14]). Eine engere, mehr als nur technische Beziehung zu unserem Spinormodell fehlt aber, da (26b) nicht dem Eichfeldsektor angehört. Jedenfalls erwartet man, daß $\sigma_{\lambda\lambda}^{\mu\nu}$ auch einen longitudinalen Tensoranteil enthält. Die Methode der Feynman-Parametrisierung liefert vollständig die Lorentz-Struktur:

$$\sigma_{\lambda\lambda}^{\mu\nu}(p) = -(4\pi)^2 \left\{ \eta^{\mu\nu} \sum_{A,B} \bar{\ell}_A \bar{\ell}_B \{ (m_B^2 - m_A m_B) L_0(A, B; p) \right. \\ \left. + (m_A^2 - m_B^2) L_1(A, B; p) \} \right. \\ \left. + 2p^2 \Pi^{\mu\nu} \sum_{A,B} (L_2(A, B; p) - L_1(A, B; p)) \cdot \bar{\ell}_A \bar{\ell}_B \right\} \quad (4.29)$$

Die $L_k(A, B; p)$ sind bestimmte Integrale:

$$L_k(A, B; p) = \int_0^1 dx \, x^k \ln \{ m_B^2(1-x) + m_A^2 \cdot x + p^2 \cdot (x^2 - x) \} \quad (4.30) \\ (k \in \mathbb{N}_0)$$

Wir verzichten darauf, die x -Integration geschlossen wiederzugeben, weil die anschließende Taylorentwicklung um $p^2 = 0$ mühsam wird. Die Massenschwelle der Amplitude (29) liegt erneut bei $p^2 = \min_{A,B} \{(m_A + m_B)^2\} = 4M^2$.

Hat man ein Raum-Zeit-konstantes Multiplikatorfeld, so genügt es,

$$\begin{aligned} \sigma_{\lambda\lambda}^{\mu\nu} = & - (4\pi)^2 \tilde{e}_M^2 \left\{ \frac{1}{2} \Lambda^2 - \frac{3}{2} M^2 + \frac{M^4}{\Lambda^2} \ln \left(\frac{\Lambda^2}{M^2} \right) \right\} \cdot \eta^{\mu\nu} \\ \xrightarrow{\Lambda \gg M} & - \frac{8\pi^2}{\Lambda^2} \eta^{\mu\nu}; \quad (\tilde{e}_M = \frac{1}{(\Lambda^2 - M^2)}) \end{aligned} \quad (4.31)$$

zu kennen.

Mit den in p^λ quadratischen Termen lautet die Amplitude (26b)

$$\sigma_{\lambda\lambda}^{\mu\nu}(p) = - \frac{(4\pi)^2}{\Lambda^4} \left(\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} (\Lambda^2 + \frac{1}{3} p^2) + \Pi^{\mu\nu} p^2 \cdot \frac{1}{3} \left(\ln \left(\frac{\Lambda^2}{M^2} \right) - \frac{5}{3} \right) \right) \quad (4.32)$$

falls man nur die führenden Beiträge im asymptotischen Fall $(\Lambda^2/M^2) \gg 1$ einbezieht.

Der Mischungsterm (26c) aus Eichfeld und Multiplikatorfeld enthält sowohl die klassische Kontaktwechselwirkung $\eta^{\mu\nu}$ als auch den 1-Schleifenbeitrag

$$\tau^{\mu\nu}(p) = 8\pi^2 \cdot i \lim_{\xi \rightarrow 0} \int \frac{d^4 l}{N} d^{\mu\nu}(l, p) e^{-i l \cdot \xi} \quad (4.33)$$

wobei nach Anwendung der Dirac-Algebra

$$\begin{aligned} d^{\mu\nu}(l, p) = \sum_B \tilde{e}_B \frac{4 \{ \eta^{\mu\nu} (m_B^2 - l^2 + p^2/4) + 2l^\mu l^\nu - \frac{1}{2} p^\mu p^\nu \}}{(l_+^2 - m_B^2) \cdot (l_-^2 - m_B^2)} \\ (l_\pm = l \pm p/2) \end{aligned} \quad (4.34)$$

gefunden wird. Um festzustellen, ob dieser Integrand ein konvergentes Loop-Integral liefert, führen wir eine asymptotische Entwicklung bei ultravioletten Komponenten des Schleifenimpuls l durch $(\sqrt{|l^2|}, |l^\mu| \gg m_B, \sqrt{|p^2|}, |p^\mu|)$:

$$d^{\mu\nu}(l, p) \longmapsto 4 \cdot \frac{\eta^{\mu\nu} - 4l^\mu l^\nu / l^2}{(l^2)^2} + O((l^2)^{-5/2}) \quad (4.35)$$

Die Spektralbedingungen (2.40) wurden benutzt. Dennoch mangelt es in (33) an absoluter Konvergenz, es bleibt eine logarithmische Divergenz bestehen. Eine sorgfältige Beachtung der Reihenfolge einzelner Grenzprozesse in (33) stellt aber eine endliche Amplitude $\tau^{\mu\nu}(p)$ sicher:

i) nach einer Wick-Drehung $l^0 \mapsto i\tilde{l}_4$ definieren wir

$$\int \frac{d^4 l}{N} = i \int_0^\infty \frac{d\tilde{l} \tilde{l}^3}{8\pi^2} \cdot \int \frac{d\Omega(\tilde{l})}{2\pi^2} \quad (4.36)$$

wobei Polarkoordinaten $\bar{l}, \Omega$ für den euklidischen Impulsvektor gewählt wurden. Die Mittelung des Integranden über alle Impuls-Raumrichtungen geschieht also zuerst. Wegen der Identität^[15]

$$\int \frac{d\Omega(\bar{l})}{2\pi^2} e^{i\bar{l}\bar{\xi}} = \frac{2}{\sqrt{z}} J_1(\sqrt{z})|_{(\bar{\xi}^2 \bar{l}^2)} =: B(\bar{\xi}^2 \cdot \bar{l}^2) \quad (4.37)$$

verhält sich der radiale Integrand in (36) bei großen Werten $\bar{l}$ wie

$$\frac{i}{\pi^2 \bar{l}} (-\delta_{\mu\nu} + 4 \frac{\bar{\xi}_\mu \bar{\xi}_\nu}{\bar{\xi}^2}) \cdot (1 + \frac{4}{z} \partial_z) \left(\frac{J_1(z)}{z} \right) \Big|_{z=\sqrt{\bar{\xi}^2 \bar{l}^2}} + O(\frac{1}{\bar{l}^2}) \quad (4.38)$$

Die asymptotische Gleichheit (siehe [12])

$$J_1(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin(z - \frac{\pi}{4}) \quad (4.39)$$

ermöglicht, daß der Ausdruck (38) schneller als $1/\bar{l}$ abklingt. Das Integral über $\bar{l}$ bleibt daher endlich.

- ii) als zweite Möglichkeit bietet sich an, die Mittelung $(1/2\pi^2) \int d\Omega(\bar{\xi})$ über die Richtungen des Splitvektors $\bar{\xi}$ bereits innerhalb des Loop-Integrals vorzunehmen; aufgrund der Symmetrie zwischen $\bar{l}, \bar{\xi}$ in Gleichung (37) bestätigt man sofort, daß dadurch der Loop-Integrand von (33) bei hohen Schleifenimpulsen wie $\frac{1}{\bar{l}^{2.5}}$ zurückgeht. Wie der abschließende Grenzübergang $\lim_{\bar{\xi}^2 \rightarrow 0}$ ausgeht, ist zunächst noch offen.

Wir bevorzugen den Weg ii), dessen Äquivalenz mit i) im übrigen nachgewiesen werden kann. Die Zerlegung

$$\begin{aligned} 2\pi^2 \tau^{\mu\nu}(\bar{p}) = \lim_{\bar{\xi}^2 \rightarrow 0} \{ & \int d^4 \bar{l} (d^{\mu\nu}(\bar{l}, \bar{p}) - d^{\mu\nu}(\bar{l}, 0)) B(\bar{\xi}^2 \cdot \bar{l}^2) \\ & + \int d^4 \bar{l} d^{\mu\nu}(\bar{l}, 0) B(\bar{\xi}^2 \cdot \bar{l}^2) \} \end{aligned} \quad (4.40)$$

von (33) ist infolge absoluter Konvergenz der beiden Integranden zulässig. Nach (35) existiert das erste dieser Integrale auch an der Stelle $\bar{\xi}^2 = 0$, denn die Subtraktion beseitigt noch die logarithmische Divergenz. Hier können also $\lim_{\bar{\xi}^2 \rightarrow 0}$ und $\int d^4 \bar{l}$ schon miteinander vertauscht werden. Beginnt man im anderen Integral mit der Raumwinkelintegration, so hat man asymptotisch (vgl. Anhang D.1):

$$\int \frac{d\Omega(\bar{l})}{2\pi^2} d^{\mu\nu}(\bar{l}, 0) \longleftarrow O((\bar{l}^2)^{-3}) \quad (4.41)$$

Jetzt kann man auch darin vor dem abschließenden Integral über $\bar{l}$ schon zum Grenzwert $\bar{\xi}^2 = 0$ übergehen. Insgesamt erhält man:

$$(-2\pi^2) \tau^{\mu\nu}(\bar{p}) = \int d^4 \bar{l} (d^{\mu\nu}(\bar{l}, \bar{p}) - d^{\mu\nu}(\bar{l}, 0)) \cdot 1 + \int_0^\infty d\bar{l} \bar{l}^3 \int d\Omega d^{\mu\nu}(\bar{l}, 0) \quad (4.42)$$

^[15] J_1 ist eine Bessel-Funktion der ersten Art; eine ausführliche Darstellung findet man in [12] Kapitel 9.

Der Limes verschwindender Punkttrennung $\bar{\xi}^2 = 0$ existiert daher.

Die Impulsintegrale können geschlossen ausgerechnet werden, wenn man eine Feynman-Parametrisierung einführt:

$$d^{\mu\nu}(\bar{l}, \bar{p}) = \int_0^1 d^{\mu\nu}(\bar{l}, \bar{p}; \alpha) d\alpha$$

$$d^{\mu\nu}(\bar{l}, \bar{p}; \alpha) = 4 \cdot \sum_B \tilde{e}_B \frac{-\delta^{\mu\nu}(m_B^2 + \bar{l}^2 - \bar{p}^2/4) + 2\bar{l}^\mu \bar{l}^\nu - \frac{1}{2}\bar{p}^\mu \bar{p}^\nu}{(\bar{l}^2 + m_B^2 + \bar{p}^2/4 + \bar{l} \cdot \bar{p}(2\alpha - 1))^2} \quad (4.43)$$

Darauf verschiebt man die Integrationsvariablen der ersten, konvergenten Amplitude von (42)

$$\bar{l} \mapsto \bar{l} + \bar{p}(\alpha - \frac{1}{2})$$

Aus (42) wird dann:

$$(-2\pi^2)\tau^{\mu\nu}(\bar{p}) = \int_0^1 d\alpha \int d^4\bar{l} \{d^{\mu\nu}(\bar{l} - \bar{p}(\alpha - \frac{1}{2}), \bar{p}; \alpha) - d^{\mu\nu}(\bar{l}, 0; \alpha)\}$$

$$+ \int_0^1 d\alpha \int d^4\bar{l} \{d^{\mu\nu}(\bar{l}, 0; \alpha) - d^{\mu\nu}(\bar{l} - \bar{p}(\alpha - \frac{1}{2}), 0; \alpha)\} \quad (4.44)$$

$$+ \int_0^1 d\alpha \int_0^\infty d\bar{l} \bar{l}^3 \int d\Omega d^{\mu\nu}(\bar{l}, 0; \alpha)$$

Der zweite Beitrag verschwindet. Angesichts der Konvergenz (benutze (35)) kann man sowohl Translationen als auch Punktspiegelungen zur Substitution verwenden. Die Behauptung wird klar, wenn man außerdem noch die Eigenschaft $d^{\mu\nu}(\bar{l}, 0; \alpha) = d^{\mu\nu}(-\bar{l}, 0; \alpha)$ einsetzt.

$\Rightarrow$

$$\tau^{\mu\nu}(\bar{p}) = - \int_0^1 d\alpha \int_0^\infty d\bar{l} \bar{l}^3 \int \frac{d\Omega(\bar{l})}{2\pi^2} d^{\mu\nu}(\bar{l} - \bar{p}(\alpha - \frac{1}{2}), \bar{p}; \alpha) \quad (4.45)$$

Mit Hilfe von Gleichung (D.7) lösen wir dann das Raumwinkelintegral. Sollte der äußere Impuls p^μ verschwinden, können bei Beachtung der Spektralsumme $\sum_A \tilde{e}_A = 0$ die restlichen Integrationen schnell beendet werden. Das Ergebnis lautet in diesem Sonderfall (vgl. auch mit [2] S. 25)

$$\tau^{\mu\nu}(\bar{p} = 0) = -\delta^{\mu\nu} \sum_C \tilde{e}_C m_C^2 = \delta^{\mu\nu} \mapsto -\eta^{\mu\nu} \quad (4.46)$$

wenn man zur Minkowski-Metrik zurückkehrt.

Gewöhnlich ist die explizite Berechnung von $\tau^{\mu\nu}(\bar{p})$ ($\bar{p} \neq 0$) mit einigem Aufwand verbunden. Hier können wir uns zum Glück kurz fassen, da $i \cdot \tau^{\mu\nu}(\bar{p})$ mit der PV-regularisierten Feynman-Amplitude der QED-Vakuumpolarisation (Elementarladung $e = 1$) fast übereinstimmt; die Amplitude der Elektronenschleife (Masse M) ist allerdings mit dem Gewichtsfaktor $(8\pi^2 \cdot \tilde{e}_M)$ ausgestattet. Die beiden Regulatoren (Massenparameter $\pm\Lambda$) sind so gewählt, daß zwar die PV-Bedingung $\sum_A \tilde{e}_A = 0$ besteht, jedoch das quadratische Massenmoment von Null verschieden ist — im Gegensatz zur PV-Regularisierung der QED. Eine Auswirkung zeigte sich gerade bei (46): die QED-Vakuumpolarisation besitzt dagegen einen transversalen Tensor $\Pi_{\mu\nu} \cdot p^2 \cdot f(p^2)$ als Amplitude. Die

skalare Funktion $f(p^2)$ hat Energiedimension 0 , weshalb sie unabhängig vom Wert des Moments $(\sum_A \tilde{e}_A m_A^2)$ ist.

$\Rightarrow$

$$i(\tau^{\mu\nu}(p) - \tau^{\mu\nu}(0)) = \Pi^{\mu\nu} \cdot p^2 f(p^2) \quad (4.47)$$

$f(p^2)$ kann in den Lehrbüchern der Quantenfeldtheorie nachgeschlagen werden; unterhalb der Massenschwelle für Paarerzeugung bei $p^2 = 4M^2$ gilt der folgende Mischungsterm zwischen A^μ , λ_μ (ausgehend von (26c)):

$$\begin{aligned} \sigma_{A\lambda}^{\mu\nu}(p) &= \frac{2}{3} p^2 \Pi^{\mu\nu} \tilde{e}_M \\ &\cdot \left(-\ln \left(\frac{\Lambda^2}{M^2} \right) + 2 \left(1 + \frac{2x^2}{p^2} \right) \cdot (w_x \operatorname{arccot} w_x - 1) \right) \Big|_\Lambda^M \\ \text{mit } w_x &= \sqrt{-1 + 4 \frac{x^2}{p^2}}, \quad \tilde{e}_M = \frac{1}{(\Lambda^2 - M^2)} \end{aligned} \quad (4.48)$$

Die Quantenkorrektur (46) hebt die klassische Kontaktwechselwirkung genau auf, was eine transversale effektive Mischungsamplitude zur Folge hat. Falls $\Lambda \gg M$ genügt es, alleine an der Stelle $x = M$ auszuwerten, wie man anhand der Taylor-Entwicklung von $\arctan(\frac{1}{2})$ unschwer erkennt.

Die transversale Lorentz-Struktur des Ausdrucks (48) ist im Einklang mit der formalen Eichinvarianz der effektiven Wirkung (siehe (24)). Die Mittelung über die Raumrichtungen des Splitvektors ξ ist bereits im Funktional der effektiven Wirkung (17) möglich:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{eff}(A_\mu, \lambda_\nu) &= \lim_{\bar{\xi}^2 \rightarrow 0} \left\{ -i \operatorname{Tr} \ln(i \not{\partial} - \not{A} - \underline{m} - (4\pi)^2 \not{x} \underline{\epsilon} \frac{J_1(\sqrt{-\xi^2 \square})}{\sqrt{-\xi^2 \square}}) \right. \\ &+ \int d^4 x \lambda_\mu A^\mu \\ &\left. - (4\pi)^2 \cdot i \left\{ \int d^4 x \lambda_\mu \right\} \int \frac{d^4 p}{N} \operatorname{tr}_D \left(\sum_A \frac{\tilde{e}_A}{\not{p} - m_A} \gamma^\mu \right) \cdot \frac{J_1(\sqrt{\xi^2 p^2})}{\sqrt{\xi^2 p^2}} \right\} \end{aligned} \quad (4.49)$$

Geht es nur darum, die Transversalität der Amplitude (26c) zu bestätigen, müssen wir nachweisen, daß die Kontraktion

$$U^\nu(p) = p_\mu \sigma_{A\lambda}^{\mu\nu}(p) \quad (4.50)$$

der Nullvektor ist. Die Vertex-Ward-Identität der QED erleichtert unsere Arbeit; in niedrigster Ordnung ($\epsilon = 1$) bedeutet sie

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}(l + p/2; m_C) \not{p} \mathcal{D}(l - p/2; m_C) \\ &= \mathcal{D}(l - p/2; m_C) - \mathcal{D}(l + p/2; m_C) \end{aligned} \quad (4.51)$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} U^\nu(p) &= p^\nu + 8\pi^2 i \cdot \lim_{\bar{\xi}^2 \rightarrow 0} \int \frac{d^4 l}{N} \\ &\cdot \sum_C \{ \tilde{e}_C \operatorname{tr}_D (\{ \mathcal{D}(l - p/2; m_C) - \mathcal{D}(l + p/2; m_C) \} \gamma^\nu) \} \cdot B(\xi^2 \cdot l^2) \end{aligned} \quad (4.52)$$

Wiederum haben wir uns entschieden, die Raumwinkelmittelung bezüglich des Splitvektors ξ bereits im Loop-Integral vorzunehmen. Dessen absolute Konvergenz für jeden der beiden Teilintegranden ergibt sich aufgrund der Spektralsumme $\sum_B \check{e}_B = 0$ sowie wegen $B(\xi^2 l^2) \propto (|l^2|)^{-3/2}$ im ultravioletten Grenzfall (siehe (39)). Dies versetzt uns in die Lage, die Schleifenimpulse l unabhängig voneinander zu verschieben: $l \mapsto l \pm p/2$; wir erhalten:

$$U^\nu(p) = p^\nu + 8\pi^2 i \cdot \lim_{\xi \rightarrow 0} \int \frac{d^4 l}{N} \sum_C (\check{e}_C \text{tr}_D(\mathcal{D}(l; m_C) \gamma^\nu)) \cdot \left\{ B(\xi^2 \cdot (l + p/2)^2) - B(\xi^2 \cdot (l - p/2)^2) \right\} \quad (4.53)$$

Mit Hilfe von (37) gelingt es,

$$\begin{aligned} B(\xi^2 \cdot (l + p/2)^2) - B(\xi^2 \cdot (l - p/2)^2) &= \int \frac{d\Omega(\xi)}{2\pi^2} e^{i l \xi} \cdot 2i \sin\left(\frac{1}{2} p \xi\right) \\ &= 2i \sin\left(-\frac{i}{2} p^\alpha \frac{\partial}{\partial l^\alpha}\right) B(\xi^2 \cdot l^2) \end{aligned} \quad (4.54)$$

zu schreiben. Nach partiellen Integrationen läßt man den Differentialoperator auf die Dirac-Spur wirken:

$$U^\nu(p) = p^\nu + 8\pi^2 i \cdot \lim_{\xi \rightarrow 0} \int \frac{d^4 l}{N} \left\{ 2i \sin\left(\frac{i}{2} p^\alpha \frac{\partial}{\partial l^\alpha}\right) \cdot \left(\sum_C \check{e}_C \text{tr}_D(\mathcal{D}(l; m_C) \gamma^\nu) \right) \right\} \cdot B(\xi^2 \cdot l^2) \quad (4.55)$$

Die bekannte Entwicklung

$$\sin(ip^\alpha \partial_\alpha) - ip^\alpha \partial_\alpha = (ip^\lambda \partial_\lambda) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (ip^\rho \partial_\rho)^{2n}}{(2n+1)!}$$

gestattet, einen Teil des Integranden an der Stelle $\xi = 0$ als Gradient einer $\propto |l^2|^{-5/2}$ abfallenden Funktion darzustellen, weswegen dort der Grenzübergang $\xi \rightarrow 0$ unter dem Integral vollzogen werden darf:

$$U^\nu(p) = p^\nu - 8\pi^2 \lim_{\xi \rightarrow 0} \int \frac{d^4 l}{N} \left\{ (ip^\alpha \frac{\partial}{\partial l^\alpha}) \cdot \sum_C \check{e}_C \frac{4l^\nu}{l^2 - m_C^2} \right\} B(\xi^2 \cdot l^2) \quad (4.56)$$

$$U^\nu(\bar{p}) = \bar{p}^\nu - \bar{p}^\nu \lim_{\bar{\xi} \rightarrow 0} \int_0^\infty dx \, x \cdot \sum_C \check{e}_C \frac{x + 2m_C^2}{(x + m_C^2)^2} \cdot B(\bar{\xi}^2 \cdot x)$$

Die Wick-Rotation aller 0-Komponenten von Lorentzvektoren ermöglicht die Raumwinkelintegration des Schleifenimpulses ($x = \bar{l}^2$).

Wir erkennen, daß die Spektralbedingungen (2.40) erlauben, den ausstehenden Grenzübergang vor dem Radialintegral durchzuführen ($B(0) = 1$):

$$\begin{aligned} U^\nu(\bar{p}) &= \bar{p}^\nu \left\{ 1 - \int_0^\infty dx \sum_C \check{e}_C \frac{(x + m_C^2)^2 - m_C^4}{(x + m_C^2)^2} \right\} \\ &= \bar{p}^\nu (1 + \sum_C \check{e}_C m_C^2) = 0 \end{aligned} \quad (4.57)$$

Damit ist die Transversalität von (26c) gezeigt, ohne Integrale der Bessel-Funktionen zu benutzen.

Die effektive Wirkung (25) im bilinearen Sektor kann jetzt aus den Einzelergebnissen (27), (32) und (48) zusammengestellt werden. Wir beschränken uns darauf, jeweils nur die führenden Terme mit der geringsten Anzahl partieller Ableitungen wiederzugeben (Niederenergienäherung):

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{eff}^{(2)} = & \frac{1}{2} \int d^4x (A_\mu(x) , \lambda_\mu(x)) \\ & \cdot \begin{pmatrix} \frac{\Pi^{\mu\nu}\square}{12\pi^2}(-3 + \sum_B \ln \frac{\bar{\Lambda}^2}{m_B^2}) & \frac{2}{3}\Pi^{\mu\nu}\square\bar{e}_M \ln\left(\frac{\Lambda^2}{M^2}\right) \\ \frac{2}{3}\Pi^{\mu\nu}\square\bar{e}_M \ln\left(\frac{\Lambda^2}{M^2}\right) & -\frac{8\pi^2}{\Lambda^2}\eta^{\mu\nu} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_\nu(x) \\ \lambda_\nu(x) \end{pmatrix} \\ \bar{e}_M = & (\Lambda^2 - M^2)^{-1}; \quad \text{hier: } \Pi^{\mu\nu} \cdot \square = \eta^{\mu\nu}\square - \partial^\mu\partial^\nu; \end{aligned} \quad (4.58)$$

Durch die Skalierung $\lambda_\nu(x) \mapsto \Lambda^2 \cdot \lambda_\nu(x)$ nimmt das Multiplikatorfeld die kanonische Dimension 1 an; (58) geht jetzt in

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{eff}^{(2)} = & \frac{1}{2} \int d^4x (A_\mu(x) , \lambda_\mu(x)) \\ & \cdot \begin{pmatrix} \sum_B \ln \frac{\bar{\Lambda}^2}{m_B^2} \cdot \frac{\Pi^{\mu\nu}\square}{12\pi^2} & \frac{2}{3} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{M^2}\right) \Pi^{\mu\nu}\square \\ \frac{2}{3} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{M^2}\right) \Pi^{\mu\nu}\square & -8\pi^2\Lambda^2\eta^{\mu\nu} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_\nu(x) \\ \lambda_\nu(x) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.59)$$

über, wobei zur Vereinfachung $M \ll \Lambda \ll \bar{\Lambda}$ unterstellt ist. $\mathcal{S}_{eff}^{(2)}$ hängt nicht nur von den Massenparametern M, Λ der nichtkanonischen Spinortheorie ab, sondern enthält darüberhinaus den PV-Cutoff $\bar{\Lambda}$ im kinetischen Term des Photonfeldes. Da die transversale Kopplung von A^μ an das Multiplikatorfeld nur relativ schwach ausgeprägt ist, stellen wir als effektive Feinstrukturkonstante

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{3\pi}{\sum_B \ln\left(\frac{\bar{\Lambda}^2}{m_B^2}\right)} \quad (4.60)$$

fest ((59) wird mit der normierten Maxwell-Lagrangedichte $\{-\frac{1}{4e^2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\}$ verglichen). Weitergehende Untersuchungen dieser effektiven freien Theorie für A^μ und sein Multiplikatorfeld finden im Abschnitt 4.2 statt.

4.1.5. HÖHERE EFFEKTIVE WECHSELWIRKUNGEN

MIT 4 ÄUSSEREN FELDFAKTOREN

Anhang C.1 führt vor, daß die effektive Wirkung $\mathcal{S}_{eff}$ nur aus Monomen mit einer geraden Gesamtzahl von Photonfeldern A^μ , Lagrangemultiplikatoren λ_ν besteht. Diese Eigenschaft kommt durch eine verallgemeinerte Ladungskonjugations-Invarianz der Spinortheorie zustande. Deshalb nehmen insgesamt 4 Felder an den nächsthöheren bosonischen Wechselwirkungen teil, deren Summe

$$\mathcal{S}_{eff}^{(4)} = \frac{i}{4} \text{Tr} \left(\frac{1}{i\hat{\partial} - \underline{m}} (\mathcal{A} + b_0 \chi \underline{h} \underline{\epsilon}) \right)^4 \quad (b_0 = 8\pi^2) \quad (4.61)$$

$|_{\text{reg}}$

lautet (benutze (5)).

Die Spur stellen wir in der Impulsraumbasis dar; der Spektral-Anteil wird explizit berechnet (siehe (10), (11)). Es treten fünf effektive Wechselwirkungen auf, welche sich in ihrem Feld-Inhalt unterscheiden:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{eff}^{(4)} = & \frac{i}{4} \int \frac{d^4 a d^4 b d^4 c}{N^3} \\ & \int \frac{d^4 l}{N} \left\{ \begin{aligned} & A_\alpha(a) A_\beta(b) A_\gamma(c) A_\delta(-a-b-c) \cdot \sum_{A=B=C=D} l_{PV} \\ & + 4b_0 A_\alpha(a) A_\beta(b) A_\gamma(c) \lambda_\delta(-a-b-c) \cdot \sum_{A=B=C=D} \tilde{\epsilon}_A \\ & + 4b_0^2 A_\alpha(a) A_\beta(b) \lambda_\gamma(c) \lambda_\delta(-a-b-c) \cdot \sum_{A=B=C,D} \tilde{\epsilon}_A \tilde{\epsilon}_D \\ & + 2b_0^2 A_\alpha(a) \lambda_\beta(b) A_\gamma(c) \lambda_\delta(-a-b-c) \cdot \sum_{A=B,C=D} \tilde{\epsilon}_A \tilde{\epsilon}_C \\ & + 4b_0^3 A_\alpha(a) \lambda_\beta(b) \lambda_\gamma(c) \lambda_\delta(-a-b-c) \cdot \sum_{A=B,C,D} \tilde{\epsilon}_A \tilde{\epsilon}_C \tilde{\epsilon}_D \\ & + b_0^4 \lambda_\alpha(a) \lambda_\beta(b) \lambda_\gamma(c) \lambda_\delta(-a-b-c) \cdot \sum_{A,B,C,D} \tilde{\epsilon}_A \tilde{\epsilon}_B \tilde{\epsilon}_C \tilde{\epsilon}_D \end{aligned} \right\} \\ & \cdot L^{\alpha\beta\gamma\delta}(a, b, c; m_A, m_B, m_C, m_D) \end{aligned} \quad (4.62)$$

Eine Fermion-Propagator-Spur wurde abgekürzt:

$$\begin{aligned} & L^{\alpha\beta\gamma\delta}(a, b, c; m_A, m_B, m_C, m_D) = \\ & \text{tr} \left(\frac{1}{\not{l} + \not{a} - m_A} \gamma^\alpha \frac{1}{\not{l} - m_B} \gamma^\beta \cdot \frac{1}{\not{l} - \not{b} - m_C} \gamma^\gamma \frac{1}{\not{l} - \not{c} - m_D} \gamma^\delta \right) \end{aligned} \quad (4.63)$$

Mit Ausnahme der Amplitude der Photon-Photon-Streuung ist der Divergenzgrad aller Schleifenintegrationen kleiner als 0, wie ein Blick auf (13) lehrt. Die oberflächliche logarithmische Divergenz der $(A^\mu)^4$ -Wechselwirkung wird durch eine PV-Bedingung für das nullte Massenmoment beseitigt (dies wurde bei der entsprechenden Spektral-Summe auch angedeutet), welche wir sowieso im bilinearen Sektor benötigen (siehe (27)). Die kombinatorischen Faktoren in (62) stimmen mit der (minimalen) Periodenlänge in Bezug auf eine zyklische Vertauschung der Vertices des zugeordneten Feynman-Diagramms überein. Spektral-Summen über A, B, C oder $D \in \{M, \Lambda, -\Lambda\}$ allein

lassen in (63) den subkanonischen Dirac-Propagator zwischen benachbarten Vertizes erscheinen (vgl. mit (2.48)).

Die $U(1)$ -Eichinvarianz der effektiven Theorie (vgl. Unterabschnitt (4.1.3)) hilft, die Lorentz-Tensorstruktur der Wechselwirkungen aus (62) vorausszusagen, ohne im einzelnen die Feynman-Amplituden kennen zu müssen. Nach Anhang C.2 ist S_{eff} nämlich ein Funktional des Multiplikators λ_ν und des Feldstärkentensors $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ alleine.

Betrachten wir den reinen Eichsektor, so wird die für Photon-Photon-Streuung verantwortliche Wechselwirkung von der Superposition dreier QED-Loops gebildet, in denen Elektronen der Massen $M, \Lambda, -\Lambda$ propagieren. Die effektive QED-Wechselwirkung haben H. Euler und W. Heisenberg (1936) als erste berechnet (siehe [15]). Die dreifache Überlagerung führt zu:

$$S_{eff}(A_\mu^4) = \frac{2}{45(4\pi)^2} \left(\sum_A \frac{1}{m_A^4} \right) \cdot \left\{ \frac{1}{4} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})^2 + \frac{7}{16} (\tilde{F}_{\mu\nu} F^{\mu\nu})^2 \right\} \quad (4.64a)$$

wobei

$$\tilde{F}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \cdot F_{\mu\nu}; \quad (\epsilon^{0123} = +1)$$

den dualen Feldstärkentensor bedeutet.

Beiträge mit zusätzlichen Ableitungen des Vektorpotentials $A^\mu(x)$ werden hier weggelassen. Da die subkanonische Spinortheorie (2) genau wie die QED gegenüber einer Paritätstransformation invariant ist, ist man auf den Pseudotensor $\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$ in (64a) eigentlich nicht angewiesen, da er stets geradzahlig oft als Faktor vorkommt. Tatsächlich findet man den gleichwertigen Ausdruck

$$S_{eff}(A_\mu^4) \approx \frac{2}{45(4\pi)^2} \cdot \frac{1}{M^4} \cdot \left\{ -\frac{5}{8} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})^2 + \frac{14}{8} F_{\mu\nu} F_{\nu\alpha} F_{\alpha\beta} F_{\beta\mu} \right\} \quad (4.64b)$$

(die Annahme $M \ll \Lambda$ vereinfachte die Spektralsumme von (64a)).

Im reinen Multiplikatorsektor macht es keine Mühe, die effektive Wechselwirkung von 4 konstanten Feldern λ_μ zu ermitteln:^[16]

$$S_{eff}(\lambda_\mu^4)|_{\lambda_\mu = \text{const}} = \int d^4x (\lambda_\alpha \lambda_\beta \lambda_\gamma \lambda_\delta)(x) \cdot \frac{i}{4} \int \frac{d^4l}{N} \frac{\text{tr}((l+M)\gamma^\alpha(l+M)\gamma^\beta(l+M)\gamma^\gamma(l+M)\gamma^\delta)}{(l^2 - M^2)^4 \cdot (l^2 - \Lambda^2)^4} \quad (4.65)$$

Die Spur kann nach den bekannten Regeln schnell reduziert werden, die Permutations-Symmetrie in den Indizes des Multiplikatorfelds erleichtert den Fortgang der Rechnung:

$$S_{eff}(\lambda_\mu^4)|_{\lambda_\mu = \text{const}} = - \int d^4x (\lambda_\alpha \lambda^\alpha)^2 \int_0^\infty \frac{dy y M^4}{(4\pi)^2 (y + M^2)^4 (y + \Lambda^2)^4} \quad (4.66)$$

^[16] Dieser Ausdruck stellt eine gute Näherung dar, falls das Feld λ_ν nur langwellige Fourier-Komponenten besitzt.

Setzt man $M \ll \Lambda$ voraus und skaliert auf ein kanonisches Multiplikatorfeld um ($\tilde{\lambda}_\alpha = \frac{1}{\Lambda^2} \cdot \lambda_\alpha$), dann entsteht:

$$\mathcal{S}_{eff}(\tilde{\lambda}_\mu^4)|_{\tilde{\lambda}_\mu = \text{const}} \approx -\frac{1}{6 \cdot (4\pi)^2} \int d^4x (\tilde{\lambda}_\alpha \tilde{\lambda}^\alpha)^2 \quad (4.67)$$

Diese Kopplung ist also nicht durch Potenzen des Massenverhältnis $\varrho := (\frac{M^2}{\Lambda^2})$ unterdrückt, welches den Entwicklungsparameter einer Störungsreihe spielen könnte. Die Quantenkorrektur der $A^\mu - \lambda_\nu$ -Kontaktkopplung (siehe (26c)) durfte ϱ ebenfalls nicht als Faktor enthalten. Natürlich gewinnen dann Korrekturgraphen höherer Loop-Ordnung zur effektiven Wirkung an Bedeutung, wenn man die herkömmlichen Verfahren der Störungstheorie verwendet. Abgesehen von der fehlenden Renormierbarkeit unserer Modelltheorie (2) droht daher noch die Gefahr, daß das von den kinetischen Operatoren aus Abschnitt (4.1.4) vermittelte physikalische Bild nicht einmal annähernd die vollständige effektive Theorie wiedergibt.

Die Analyse der Wechselwirkungen vom Typ

$$(A^\mu A^\nu A^\rho \lambda^\sigma), \quad (A^\mu A^\nu \lambda^\rho \lambda^\sigma), \quad (A^\mu \lambda^\nu \lambda^\rho \lambda^\sigma),$$

fällt schwerer; die Tensorstruktur der im Niederenergie-Limes führenden Beiträge kann zwar leicht vorausgesagt werden; wenn aber die zugehörigen Koeffizienten, welche Funktionen von M, Λ sind, verlangt werden, bleibt es einem nicht erspart, längliche Feynmanintegrale zu berechnen.

4.2. DISKUSSION DER FELDGLEICHUNGEN UND GREENFUNKTIONEN

4.2.1. KLASSISCHE FELDGLEICHUNGEN, NOETHERSTROM

Das klassische Spinormodell (2), dessen Selbstwechselwirkung auf einfache Art durch das Vektorhilfsfeld A^μ ausgedrückt wird, besitzt folgende Euler-Lagrange-Feldgleichungen:

$$(i\partial - A - \underline{m})\underline{\epsilon}\psi(x) - 8\pi^2 \cdot \overline{\lim}_{\xi \rightarrow 0} \lambda(x + \frac{1}{2}\xi) \cdot \underline{h} \cdot \psi(x + \xi) = 0 \quad (4.68a)$$

$$-\overline{\psi}\gamma^\mu \underline{\epsilon}\psi + \lambda^\mu = 0 \quad (4.68b)$$

$$A^\mu - 8\pi^2: \overline{\psi}_i \gamma^\mu \psi_j: h_{ij} = 0 \quad (4.68c)$$

$$\psi = (\psi_M, \psi_\Lambda, \psi_{-\Lambda})^T$$

Eine Variation der Wirkung bezüglich $\psi(x)$ ergibt die zu (68a) adjungierte Feldgleichung; bei (68c) handelt es sich natürlich um die Zwangsbedingung für das bosonische Verbundfeld A^μ . Ein Vergleich mit der (Quanten-) Elektrodynamik legt nahe, wegen (68b) den Lagrange-Multiplikator λ_ν als kanonischen 4-Strom aufzufassen (siehe [1], [2]). Allerdings ist diese Deutung etwas voreilig.

Zunächst zeigt die globale Invarianz des Modells (2) unter Phasentransformationen der Polfelder, daß ein erhaltener Strom j^μ existiert (Noether-Theorem). Dieser 4-Vektor wird nach der Vorschrift

$$j_{(N)}^\mu = -i \frac{\partial \mathcal{L}_\psi}{\partial \psi_{A(x),\mu}} \cdot \psi_A(x) + i \overline{\psi}_A(x) \frac{\partial \mathcal{L}_\psi}{\partial \overline{\psi}_A(x),\mu} \quad (4.69)$$

gebildet. Nun muß beachtet werden, daß außer dem kinetischen Term der Polfelder auch das Spinor-Operatorprodukt über Raum-Zeit-Ableitungen der fundamentalen Felder verfügt — sonst ginge die lokale $U(1)$ -Invarianz von $\mathcal{L}_\psi$ für

$$\psi(x) \mapsto e^{-i\alpha(x)}\psi(x); \quad A^\mu(x) \mapsto A^\mu(x) + \partial^\mu\alpha(x)$$

verloren ! ; somit erscheint noch ein zweiter Beitrag in j^μ (siehe (16), benutze [6]):

$$j_{(N)}^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu \underline{\epsilon}\psi + i \cdot 8\pi^2 \cdot \overline{\lim}_{\xi \rightarrow 0} \left\{ \bar{\psi}(x_-) \not{x}(x) \xi^\mu \underline{h}\psi(x_+) + O(\xi^\beta) \right\} \quad (4.70)$$

Das Punkttrennungs-regularisierte Operatorprodukt $\bar{\psi}_A(x_-)\psi_B(x_+) \cdot \xi^\mu$ verhält sich im Grenzfall $\xi \rightarrow 0$ wie sein zeitgeordneter Vakuum Erwartungswert; die asymptotische Entwicklung (2.74) des subkanonischen Propagators führt dann zu

$$j_{(N)}^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu \underline{\epsilon}\psi - \lambda^\mu \quad (4.71)$$

nachdem man die euklidische Raumwinkel-Integration in (70) erledigt hat. Dieser klassische (erhaltene) Strom ist jedoch trivial, weil man die Feldgleichung (68b) heranziehen darf:

$$j_{(N)}^\mu \equiv 0 \quad (4.72)$$

Die eben angestellten Rechnungen werden sogar überflüssig, wenn man die bekannte Definition

$$j_{(N)}^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}_\psi(\bar{\psi} + i\alpha\bar{\psi}, \psi - i\alpha\psi)}{\partial(\partial_\mu\alpha)} \quad (4.73)$$

benutzt (siehe [5] S. 28). Lediglich das Transformationsgesetz (2.86) des Spinor-Verbundfeldes ($8\pi^2: \bar{\psi}\underline{h}\psi:$) sorgt dafür, daß erneut (72) entsteht. Offenbar begegnet man dieser Identität auch in solchen $U(1)$ -invarianten Modellen, deren Multiplikatorbedingung eine andere Definition des aus Spinoren zusammengesetzten Eichfeldes A^μ enthält.

Sobald die 1-Schleifen-Quantenkorrekturen einbezogen werden, kommt es zu einschneidenden Änderungen bei den Feldgleichungen. Während die A_μ - λ_ν -Kontaktwechselwirkung verschwindet, erwirbt das bisherige Hilfsfeld A_μ einen kinetischen Maxwell-Term; ähnlich ergeht es dem Multiplikatorfeld λ_ν (vgl. (59)). Eine konsistente Behandlung darf auch die Loop-Korrekturen von Amplituden mit äußeren Polfeldlinien nicht vergessen; dazu gehören der subkanonische Propagator (2.121) sowie die in dieser Arbeit unberücksichtigte A_μ -Vertex-Korrektur; beide können der 1-Loop-Näherung des erzeugenden Funktional $\Gamma(A_\mu, \lambda_\nu; ; \psi, \bar{\psi})$ (siehe (3.34)) entnommen werden. Obwohl die effektive A_μ -Feldgleichung eine Vielzahl von Beiträgen enthält, ist die bekannte QED-Gleichung mit dem erhaltenen $U(1)$ -Strom als Quelle darin leicht zu erkennen:

$$\bar{\psi}\gamma^\nu \underline{\epsilon}\psi = \frac{1}{4\pi\alpha} \partial^\mu F_\mu{}^\nu + \dots \quad (4.74)$$

4.2.2. QUELLEN FÜR VERSCHIEDENE (PRODUKT-) OPERATOREN

Die Green-Funktionen mit äußeren Beinen für das Vektorpotential A_μ , das Lagrange-Multiplikatorfeld λ_ν , die in $(\bar{\psi})\psi$ eingetragenen (adjungierten) Polfelder sowie die beiden Produkt-Operatoren $\bar{\psi}\gamma^\mu \underline{\epsilon}\psi$ und $(8\pi^2: \bar{\psi}\gamma^\mu \underline{h}\psi:)$ können durch mehrfache Variation des erzeugenden Funktionals (vgl. (3.19))

$$Z(\mathbf{j}) = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\lambda_\nu \cdot e^{i \int d^4x \{ \mathcal{L}_\psi(\bar{\psi}, \psi; A_\mu, \lambda_\nu) + \bar{\eta} \cdot \psi + \bar{\psi} \cdot \eta + j_\mu \cdot A^\mu + \sigma_\nu \cdot \lambda^\nu + \bar{\psi}\gamma^\mu \underline{\epsilon}\psi \cdot \omega_\mu + b_0: \bar{\psi}\gamma^\mu \underline{h}\psi: \cdot \varrho_\mu \}} \quad (4.75)$$

$$b_0 = 8\pi^2; \quad \mathbf{j} \equiv (\bar{\eta}, \eta; j_\mu, \sigma_\nu; \omega_\mu, \varrho_\nu)$$

nach den Quellen $j_\mu, \sigma_\nu, \omega_\mu, \varrho_\nu, \bar{\eta}, \eta$ gewonnen werden; dabei gehören die beiden zuletzt Genannten einer Grassmann-Algebra an.

Wenn wir das Pfadintegral über das Hilfsfeld A_μ sowie das begleitende Vektorfeld λ_ν lösen, setzen wir uns in die Lage, die Dynamik vom Standpunkt der selbstwechselwirkenden Spinortheorie her zu beurteilen:

$$Z(\mathbf{j}) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \cdot e^{i \int d^4x \{ P(\bar{\psi}, \psi; \mathbf{j}) - j^\mu \cdot \sigma_\mu \}} \quad (4.76)$$

$$\text{mit } P(\bar{\psi}, \psi; \mathbf{j}) = \bar{\psi} \left\{ (i\partial - \underline{m} - A^{(c)} + \not{d} + \not{c}) \cdot \underline{\epsilon} + b_0 (\not{d} + \not{f}) \cdot \underline{h} \cdot e^{\vec{\xi}\vec{\partial}/2} \right\} \psi$$

$$+ \bar{\eta} \cdot \psi + \bar{\psi} \cdot \eta; \quad A_\tau^{(c)} := b_0: \bar{\psi} \underline{h} \gamma_\tau \psi:$$

Da die Lagrange-Zwangsbedingung aus (2) sich im Formalismus des Pfadintegrals als funktionale δ -Distribution entpuppt, gab es während der Auswertung von (75) keine Hindernisse. Das ungewöhnliche Skalarprodukt $\{j^\mu \cdot \sigma_\mu\}$ der Quellen von A^μ bzw. λ_ν verhindert, j_β (neben ϱ_β) als Quelle des Operatorprodukts $A_\tau^{(c)}$ anzusehen, bzw. $\frac{\delta}{\delta \sigma_\tau(x)}$ (neben $\frac{\delta}{\delta \omega_\tau(x)}$) zu verwenden, wenn Beine des Produktoperators $\bar{\psi}\gamma^\mu \underline{\epsilon}\psi$ hergestellt werden sollen. Betrachtet man aber das erzeugende Funktional $G_c(\mathbf{j})$ der zusammenhängenden Green-Funktionen, dann verschwinden diese Unterschiede weitgehend; wegen (3.3) gilt nämlich:

$$G_c(\mathbf{j}) = \ln \left[\lim_{\xi \rightarrow 0} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{i \int d^4x P(\bar{\psi}, \psi; \mathbf{j})} \right] - i \int d^4x j^\mu \cdot \sigma_\mu \quad (4.77)$$

Demnach stimmen nur die beiden 2-Punkt-Funktionen mit A_μ, λ_ν bzw. $A_\mu^{(c)}, \bar{\psi}\gamma^\mu \underline{\epsilon}\psi$ als äußeren Beinen nicht überein:

$$\frac{-i \cdot \delta}{\delta j_\mu(x)} \frac{-i \cdot \delta}{\delta \sigma_\nu(y)} G_c(\mathbf{j}) = \frac{-i \cdot \delta}{\delta \varrho_\mu(x)} \frac{-i \cdot \delta}{\delta \omega_\nu(y)} G_c(\mathbf{j}) + i\eta^{\mu\nu} \delta^{(4)}(x-y) \quad (4.78)$$

(vgl. (3.2)); die Differenz bedeutet genau den klassischen $A_\mu\text{-}\lambda_\nu$ -Kontaktpropagator (2.97b).

Eine enge Verbindung herrscht zu der Tatsache, daß bis auf eine einzige Ausnahme die zusammenhängenden Greenfunktionen mit Einsetzungen des Noether-Stromoperators (71) verschwinden, welche durch Anwendung der Linearkombination

$$-i \left(\frac{\delta}{\delta \omega_\mu(x)} - \frac{\delta}{\delta \sigma_\mu(x)} \right) \quad (4.79)$$

auf $G_c(j)$ gewonnen werden. Denn die Phasendichte $P(\bar{\psi}, \psi; j)$ in (76) hängt nur von der Summe der Quellenvektoren ω^μ, σ^μ ab.

$$\begin{array}{c}
 \sum_{D_c} \text{Diagramm} - \sum_{\tilde{D}_c} \text{Diagramm} = \\
 \hline
 = \begin{cases} -i\delta_{\mu\nu} & ; \text{äußere Linien: } \text{wavy} \\
 \sum_{D'_c} \left\{ \text{Diagramm} - \text{Diagramm} \right\} = 0 & ; \text{sonst} \end{cases}
 \end{array}$$

Abb. 4: Bestimmung der zusammenhängenden Greenfunktionen mit einer $j_{(N)}^\mu$ -Einsetzung; die Summen laufen über alle verfügbaren (1-komponentigen) Diagramme, wobei die äußeren Linien festgelegt sind.

Der auszunehmende Fall ist offenbar

$$\langle 0 | T j_{(N)}^\mu(x) \cdot A^\mu(y) | 0 \rangle_c = -i\delta^{\mu\nu} \delta^{(4)}(x-y) \quad (4.80)$$

wovon man sich anhand der Feynman-Regeln (2.97) schnell überzeugt (vgl. Bild 4).

Hinter diesen Überlegungen ist verborgen, daß den klassischen Feldgleichungen (etwa (68b)) in der Quantenfeldtheorie ein Pfadintegral entspricht, dessen Integrand aus der entsprechenden Feldableitung $(\frac{\delta}{\delta\psi}, \frac{\delta}{\delta\bar{\psi}}, \frac{\delta}{\delta A_\mu}, \frac{\delta}{\delta\lambda_\nu})$ des Phasenfaktors in (75) besteht und welches daher trivial verschwindet (siehe [5], Kapitel 10). Integrand aus der entsprechenden Feldableitung $(\frac{\delta}{\delta\psi}, \frac{\delta}{\delta\bar{\psi}}, \frac{\delta}{\delta A_\mu}, \frac{\delta}{\delta\lambda_\nu})$ des Phasenfaktors in (75) besteht und welches daher trivial verschwindet (siehe [5], Kapitel 10).

Aus einem anderen Blickwinkel zeigt sich das erzeugende Funktional $Z(j)$, wenn man die Grassmann-Integration über die antikommutierenden Variablen $\bar{\psi}, \psi$ durchführt; da auch die Quellterme der beiden Operatorprodukte nur Spinor-Bilineare enthalten, gelingt das Pfadintegral in geschlossener Form (benutze (3.14)):

$$\begin{aligned}
 Z(j) &= \overline{\lim}_{\xi \rightarrow 0} \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\lambda_\nu e^{i\{-i\text{Tr} \ln U + \int d^4x (-\bar{\eta} \frac{1}{\not{D}} \eta + (\lambda + \varrho + j)_\nu \cdot (A + \omega + \sigma)^\nu - j_\nu \cdot \sigma^\nu)\}} \\
 \text{mit } U &= (i\not{D} - \not{A} - \underline{m}) \cdot \underline{\xi} - b_0 \cdot \underline{h} e^{\xi \not{\partial} / 2} \cdot \not{\chi} \quad (4.81)
 \end{aligned}$$

Dabei konnte U mittels funktionaler Translation der Variablen A_μ, λ_ν von den Quellen ω^μ, ϱ^ν befreit werden; gleichzeitig erscheinen aber mehrere Skalarprodukte von Quellen-Vektoren im Exponenten. Sie führen wieder dazu, daß die Quelldifferentiationen $\frac{\delta}{\delta j^\mu}$ und $\frac{\delta}{\delta \varrho^\mu}$ bzw. $\frac{\delta}{\delta \sigma^\nu}$ und

$\frac{\delta}{\delta\omega\nu}$ nicht in allen Fällen dieselben Greenfunktionen ergeben. Hängen letztere jedoch zusammen, dann sind nur 2-Punkt-Funktionen von diesen Abweichungen betroffen. Darauf haben wir schon im Anschluß an (76) hingewiesen.

4.3. DIE SPINOR-SPINOR-STREUAMPLITUDE AUS LEITERDIAGRAMMEN

4.3.1. DYSON-REKURSIONSFORMEL

Die 1-Schleifen-Korrekturen zur Spinortheorie (2.96) mit Selbstwechselwirkung führten auf eine effektive Wirkung mit kinetischen Termen für das zusammengesetzte $U(1)$ -Eichfeld A_μ und den zugeordneten Lagrange-Multiplikator λ_μ . Wir kamen zu diesem Ergebnis nach der expliziten Durchführung der Funktionalintegration über die verschiedenen Polfelder ψ_i im erzeugenden Funktional Z der Green-Funktionen. Hier beschäftigen wir uns mit der Streuung zweier Polfelder ψ_i aneinander, die durch die Spinorwechselwirkung 4. Ordnung vermittelt wird. Unser Ziel besteht darin, eine effektive Beschreibung des Streuvorganges aufzustellen, welche die Wechselwirkungen als Austausch gewisser kanonischer Bosonenfelder näherungsweise zusammenfaßt. Abschließend stellen wir diese Betrachtungen der bereits gewonnenen effektiven Lagrangedichte (59) gegenüber.

Die bilinearisierte Lagrangedichte (2.94) für ein subkanonisches Spinorfeld $\tilde{\chi} = \sum_i \sqrt{|\tilde{\epsilon}_i|} \cdot \psi_i$ konnte geschrieben werden als:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_i (i\partial - A - m_i) \psi_i \cdot \epsilon_i + \lambda_\mu (A^\mu - r: \bar{\psi}_i \gamma^\mu \psi_j: h_{ij}) \quad (4.82)$$

(Summation über den Spektralindex $i \in \{1, 2, 3\}$ wird vorausgesetzt;

$$m_i = \text{diag}(M, \Lambda, -\Lambda), \quad \epsilon_i = \text{diag}(1, -1, -1), \quad r = 8\pi^2, \quad h_{ij} = \sqrt{|\tilde{\epsilon}_i \tilde{\epsilon}_j|}$$

vgl. (2.96)). Die entsprechenden Feynman-Regeln mit zugehörigen Graphenelementen sind dann:

1. Polfeldpropagator für Polfeldsorte A:

$$\frac{i\epsilon_A \delta_{AB}}{(\not{p} - m_A)} \triangleq \begin{array}{c} A \quad \quad B \\ \hline \longleftarrow \end{array} \quad (4.83a)$$

2. Kontaktpropagator zwischen den Hilfsfeldern A_μ, λ_ν (auch K-Linie):

$$i\eta^{\mu\nu} \triangleq \begin{array}{c} \mu \quad \quad \nu \\ \hline \text{~~~~~} \end{array} \quad (4.83b)$$

3. Vertex mit Hilfsfeld A_μ :

$$-i\delta_{AB} \gamma^\mu \epsilon_A \triangleq \begin{array}{c} \quad \quad \quad B \\ \quad \quad \quad \nearrow \\ \mu \text{ ~~~~~} \bullet \\ \quad \quad \quad \searrow \\ \quad \quad \quad A \end{array} \quad (4.83c)$$

4. Vertex mit Hilfsfeld λ_μ :

$$-ir\gamma^\mu h_{AB} \triangleq \begin{array}{c} \quad \quad \quad B \\ \quad \quad \quad \nearrow \\ \mu \text{ ~~~~~} \bullet \\ \quad \quad \quad \searrow \\ \quad \quad \quad A \end{array} \quad (4.83d)$$

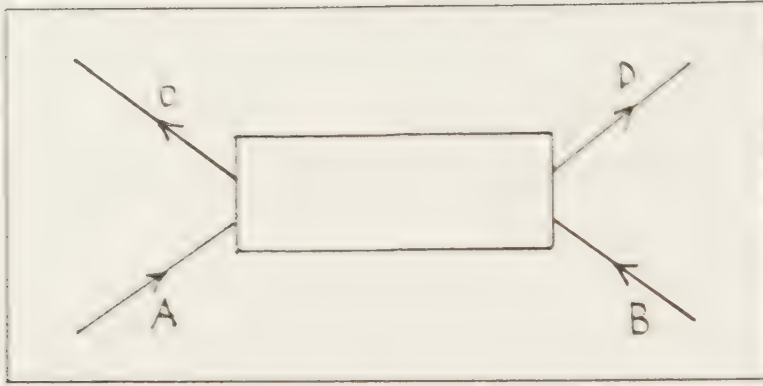


Abb. 5: Die verbundene Spinor-Spinor-Streuamplitude

Der mit Massenparameter-Indizes beschriebene Streuprozess $A + B \rightarrow C + D$ wird vollständig durch die 4-Punkt-Greenfunktion

$$S^{(4)}(x, A; y, B; u, C; v, D) := \langle 0 | T \psi_C(u) \bar{\psi}_A(x) \psi_D(v) \bar{\psi}_B(y) | 0 \rangle \quad (4.84)$$

mit wechselwirkenden Polfeldern ψ_i bestimmt.

In Bild 5 enthält der eingezeichnete Kasten die Summe aller verbundenen Feynmangraphen, welche nach (83) gebildet werden können. Davon greifen wir allerdings nur eine Teilsumme $T^{(4)}(x, A, y, B, u, C; v, D)$ heraus, die analytisch leicht zu handhaben ist. Zu ihr mögen alle Diagramme gehören, deren Loops ausschließlich die Polfeld-Propagatoren aber nicht die bosonischen Kontakt-Propagatoren enthalten. Letztere spielen in den ausgesuchten Diagrammen die Rolle von Schnittlinien, die die Zusammenhangskomponenten verbinden. Loops mit mehr als zwei Spinor-propagatoren sind in unserer Teilsumme ausgeschlossen.

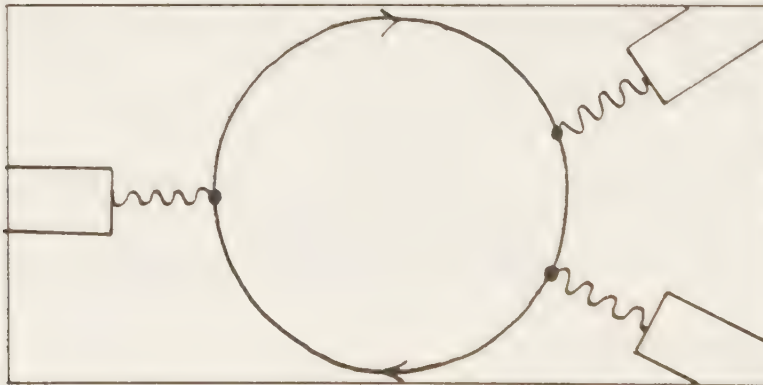


Abb. 6: Mögliches $T^{(4)}(\dots)$ -Diagramm mit über zwei Vertizes im Spinorloop; jeder offene Kasten bedeutet eine Zusammenhangskomponente.

Sonst käme es etwa zu der in Bild 6 gezeigten Zerlegung des gesamten Diagramms in disjunkte zusammenhängende Komponenten. Die vier äußeren Spinorlinien gehören paarweise (je eine ein-

und auslaufende gemeinsam) bestimmten Zusammenhangsgebieten an. Mithin besitzt zumindest eines von ihnen nur die K-Linie als äußere Linie. Der Impulsimport über sie muß daher verschwinden. Jedoch ist die Amplitude des Teildiagramms ein Lorentz-Vektor t^μ , da die K-Linie auf einen γ^μ enthaltenden Vertex trifft (siehe (83c-d)). Bei einer Lorentz-invarianten Regularisierung ist t^μ notwendig der Nullvektor.

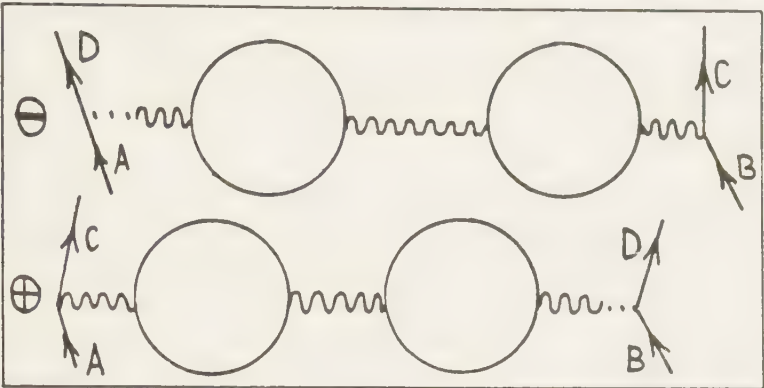


Abb. 7: typische Topologie der Teilsummenbeiträge zur Spinor-Spinor-Wechselwirkung (die Vertizes wurden noch nicht festgelegt).

Damit gelangen wir zu einer anschaulichen Charakterisierung der Glieder unserer Teilsumme: der Kasten in Bild 5 besteht aus einer linearen Abfolge von Kontakt-Propagatoren (83b) mit zweibeinigen Polfeldschleifen; an den Enden trifft eine K-Linie mit den äußeren Spinorlinien A, B, C, D zusammen, wobei entweder die Paare (A, C) bzw. (B, D) je einen Vertex gemeinsam haben oder aber unter Vorzeichenwechsel (antivertauschende Polfelder!) die Paare (A, D) bzw. (B, C) zustandekommen (vgl. Bild 7).

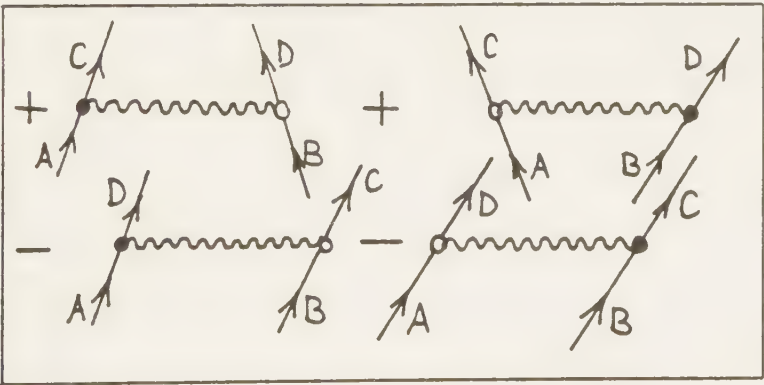


Abb. 8: Sämtliche Baumgraphen zur 4-Punkt-Greenfunktion (84).

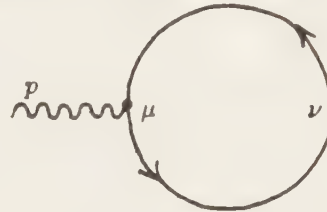
Selbstverständlich ist die Baumgraphen-Amplitude auch in unserer Teilsumme enthalten. In Bild 8 ist sie dargestellt. Diese Graphen alleine beschreiben nur eine Kontaktwechselwirkung der äußeren Spinorfelder ψ_i , die auch durch Elimination der Hilfsfelder A_μ, λ_ν in (82) gefunden werden

kann. Da wir darüberhinaus für den Streuprozess auch die "Kettengraphen" aus Bild 7 berücksichtigen, zeichnet sich die Möglichkeit einer effektiven Beschreibung in Form eines geeigneten Bosonenaustausches ab.

Die Glieder von $T^{(4)}(\dots)$ können nach der Anzahl L der beteiligten Loop-Unterdiagramme klassifiziert werden. Wir sprechen daher auch von L -Ketten. Damit sind stets $(L + 1)$ Kontaktpropagatoren (83c) verknüpft, die (von links nach rechts gelesen) einen A_μ -Vertex mit einem λ_ν -Vertex oder umgekehrt verbinden. Insgesamt verfügen wir deshalb über $2^{(L+1)}$ verschiedene Feynmangraphen mit genau L Schleifen, wenn man einmal von der $(C \leftrightarrow D)$ -Antisymmetrisierung im Ausgangskanal absieht.

Zur analytischen Behandlung von $T^{(4)}(\dots)$ wiederholen wir kurz die Amplituden der einzelnen amputierten Polarisationsdiagramme, wobei nach den im äußeren 4-Impuls p^μ quadratischen Beiträgen die Taylorentwicklung abgebrochen wird (vgl. (27), (48), (32)): [17]

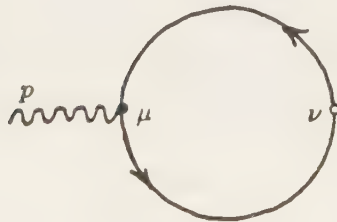
1.



$$\hat{=} (-ip^2 \Pi^{\mu\nu} C_1) \cdot \Lambda^2 \quad (4.85a)$$

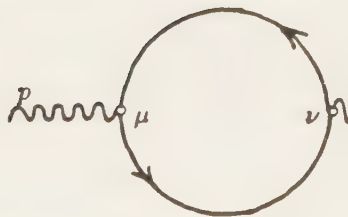
(analog zur QED-Vakuumpolarisation)

2.



$$\hat{=} (-i\eta^{\mu\nu} - ip^2 \Pi^{\mu\nu} C_2) \quad (4.85b)$$

3.



$$\hat{=} (-i\eta^{\mu\nu} C_3 - ip^2 (\Pi^{\mu\nu} C_4 + L^{\mu\nu} C_5)) \cdot \Lambda^{-2} \quad (4.85c)$$

mit den orthogonalen Projektoren Π, L :

$$\begin{aligned} L^{\mu\nu} &= p^\mu p^\nu / p^2 \\ \Pi^{\mu\nu} &= \eta^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu / p^2 = \eta^{\mu\nu} - L^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (4.86)$$

[17] Bei geschlossenen Spinorlinien ist auch die Spur im Spektral-Raum zu erledigen.

und den Konstanten

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{1}{12\pi^2\Lambda^2} \sum_A \ln\left(\frac{\Sigma_A^2}{m_A^2}\right) \quad (\Sigma_A : \text{Pauli - Villars - Cutoff zu } m_A) \\
 C_2 &= \frac{2}{3} \cdot \frac{\ln\left(\frac{\Lambda^2}{M^2}\right)}{(\Lambda^2 - M^2)} \\
 C_3 &= 8\pi^2 \\
 C_4 &= \frac{8\pi^2}{3\Lambda^2} \cdot \left(2 \ln\left(\frac{\Lambda^2}{M^2}\right) - \frac{7}{3}\right) \\
 C_5 &= \frac{8\pi^2}{3\Lambda^2}
 \end{aligned} \tag{4.87}$$

welche durchgängig die Energiedimension (-2) besitzen.

Die Kettenstruktur aller $T^{(4)}(\dots)$ -Glieder sorgt dafür, daß jeweils der gleiche 4-Impuls p^μ die Loop-Diagramme eines Feynmangraphen in Bild 7 erreicht und verläßt. Wenn im Impulsraum längs der Linien A, B p_1, p_2 einlaufen und längs der Linien C, D p_3, p_4 fortlaufen, dann ist der entlang der Ketten ausgetauschte Impuls nach Bild 7 entweder

$$p^\mu = p_3^\mu - p_1^\mu = p_2^\mu - p_4^\mu$$

oder

$$\tilde{p}^\mu = p_4^\mu - p_1^\mu = p_2^\mu - p_3^\mu$$

Die hier vorgenommene Auswahl $T^{(4)}(\dots)$ ist sicherlich willkürlich, obwohl eine einfach auszudrückende topologische Bedingung die Glieder der Teilsumme $T^{(4)}(\dots)$ kennzeichnet (Reduzibilität in jeder Kontakt-Propagatorlinie). Deshalb können auch Vertex-Korrekturen beiseite gelassen werden, weil sonst der Kontakt-Propagator an einer Schleife beteiligt wäre.

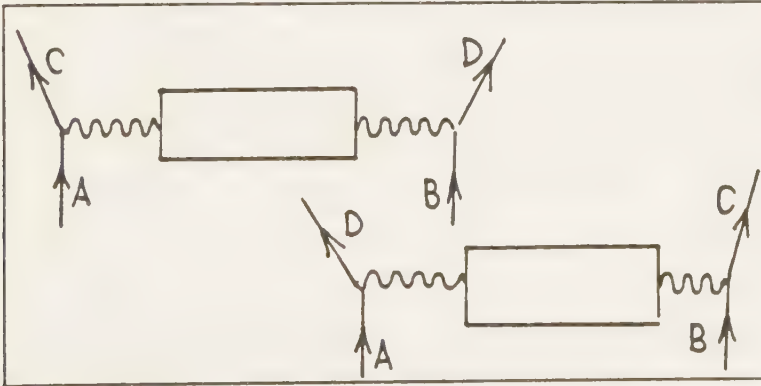


Abb. 9: Gegenüber Bild 7 treten in den Kästen neue verbundene Diagramme auf.

Die Erweiterung von $T^{(4)}(\dots)$ auf alle Graphen $\tilde{T}^{(4)}(\dots)$, die nach Bild 9 zulässig sind, wirft schwierige Probleme auf, die durch die Abwesenheit eines sehr kleinen Entwicklungsparameters ξ bedingt sind. Die in (82) vorgenommenen Umskalierungen $A^\mu \rightarrow \xi \cdot A^\mu$, $\lambda_\mu \rightarrow \frac{1}{\xi} \cdot \lambda_\mu$ zeigen dies deutlich; insgesamt bieten sie keine Vorteile im Hinblick auf eine störungstheoretische Behandlung.

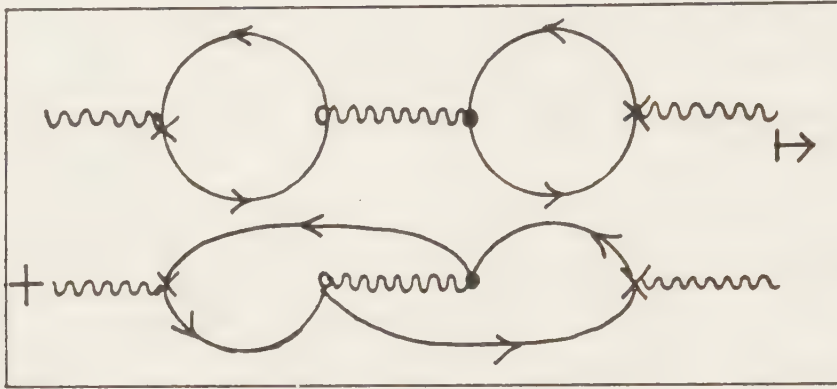
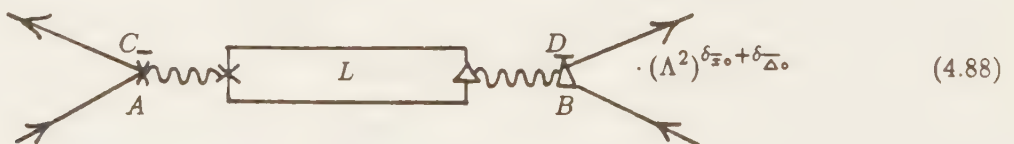


Abb. 10: Fierz-Transformation eines Kettenabschnitts, der zu $T^{(4)}(\dots)$ gehört (es ist die Feynmanregel zu beachten, daß jede Fermionschleife ein Minuszeichen erhält).

Ausgeschlossen von $T^{(4)}(\dots)$ sind auch jene Diagramme, die sich lediglich um Fierz-Transformationen unterscheiden (Ausnahme: der Baumgraphenbeitrag). Wir erläutern dies anhand von Bild 10. Hätten wir unsere Spinor-Lagrangedichte (2.90b) erst nach der Fierz-Symmetrisierung bilinearisiert, so besäßen die gerade angesprochenen transformierten Diagramme wieder Kettengestalt (natürlich treten andere Vertexstrukturen auf), die als Kennzeichen von $T^{(4)}(\dots)$ gedient hat.

Ein Vorteil der Auswahl von $T^{(4)}(\dots)$ ist darin zu sehen, daß die $(L+1)$ -Ketten aus den L -Ketten durch lineare Rekursion hervorgehen. Derjenige Teil der L -Kettenklasse, welcher die einlaufenden Spinorlinien an den Vertizes $\bar{x}, \bar{\Delta} \in \{\bullet, \circ\}$ zur Streuung bringt, möge mit dem folgenden Diagramm bezeichnet werden ($L \geq 1$):



Dies definiert die im Kasten mit den Vertizes $x \neq \bar{x}, \Delta \neq \bar{\Delta}$ enthaltene Amplitude. Die zusätzlichen Potenzen von Λ^2 geben ihr in allen vier verschiedenen Fällen die Energie-Dimension (-2) . Sie ist ein Tensor zweiter Stufe im Impulsraum, dessen Indizes sich nach den Lorentz-Komponenten der äußeren K-Linien richten.

Ein weiteres Symbol repräsentiert die Reihe

$$\begin{array}{|c|} \hline \times \\ \hline \end{array} = \sum_{L=1}^{\infty} \begin{array}{|c|} \hline L \\ \hline \end{array} \quad (4.89)$$

mit $x, \Delta \in \{0, \bullet\}$

wobei stillschweigend von ihrer Konvergenz ausgegangen wird. Der aufgenommene 4-Impuls betrage jedesmal p^μ . Die gesuchte Teilsumme $T^{(4)}(\dots)$ setzt sich also folgendermaßen zusammen:

$$\begin{aligned} T^{(4)}(p, \bar{p}) = & \left\{ \Lambda^4 \cdot \begin{array}{|c|} \hline \text{Diagram 1} \\ \hline \end{array} + \Lambda^2 \cdot \begin{array}{|c|} \hline \text{Diagram 2} \\ \hline \end{array} \right. \\ & + \Lambda^2 \cdot \begin{array}{|c|} \hline \text{Diagram 3} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \text{Diagram 4} \\ \hline \end{array} \\ & \left. + \begin{array}{|c|} \hline \text{Diagram 5} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \text{Diagram 6} \\ \hline \end{array} \right\} \ominus (C \leftrightarrow D) \end{aligned} \quad (4.90)$$

Die angekündigte Rekursionsbeziehung für die Amplituden aus (88) ist schließlich nach den Feynmanregeln (83):

$$\begin{pmatrix} \begin{array}{|c|} \hline L+1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline L+1 \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline L+1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline L+1 \\ \hline \end{array} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Diagram 1} & \text{Diagram 2} \cdot \Lambda^{-2} \\ \text{Diagram 3} \cdot \Lambda^2 & \text{Diagram 4} \end{pmatrix} \cdot \dots \cdot \begin{pmatrix} \begin{array}{|c|} \hline L \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline L \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline L \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline L \\ \hline \end{array} \end{pmatrix} \quad (L \geq 1) \quad (4.91)$$

Formale Matrizenmultiplikation wird dabei vorausgesetzt. Die Matricelemente sind Lorentz-Tensoren zweiter Stufe; eine Verjüngung der Indizes benachbarter Vertizes findet statt. Für $L = 1$ gelten die Anfangsbedingungen:

$$\begin{pmatrix} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Diagram 1} & \Lambda^{-4} \cdot \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} & \Lambda^{-2} \cdot \text{Diagram 4} \end{pmatrix} \quad (4.92)$$

Wegen (85) lautet die 1-Schleifen-Matrix in (91), welche den Rekursionsschritt ermöglicht:

$$\underline{Q} = \begin{pmatrix} \eta + p^2 \Pi C_2 & p^2 \Pi C_1 \\ \eta C_3 + p^2 (\Pi C_4 + L C_5) & \eta + p^2 \Pi C_2 \end{pmatrix} \quad (4.93)$$

(η : Minkowski-Tensor). Die rechte Seite von (89) stellt dann die folgende geometrische Reihe dar:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \end{pmatrix} &= \sum_{\lambda=0}^{\infty} Q^\lambda \cdot \begin{pmatrix} \text{Diagram 1} & \Lambda^{-4} \cdot \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} & \Lambda^{-2} \cdot \text{Diagram 4} \end{pmatrix} \\ &=: \left(\sum_{\lambda=0}^{\infty} Q^\lambda \right) \underline{U} \cdot \Lambda^{-2} \end{aligned} \quad (4.94)$$

mit $Q^0 := \eta$. Q^λ wird durch $(\lambda - 1)$ -fache Index-Kontraktion gewonnen.

Wir sehen uns mehreren Schwierigkeiten gegenüber, wenn die Berechnung der unendlichen Summe versucht wird. Bei Konvergenz der Reihe wird offenbar der Grenzwert

$$\frac{\eta}{\eta - Q} \quad (4.95)$$

angenommen. Tatsächlich ist die Matrizennorm von Q jedoch nicht kleiner als 1, was eine hinreichende Voraussetzung wäre. Betrachtet man etwa den Sonderfall eines verschwindenden Impulsübertrags p^μ , so hat man:

$$\underline{Q}_{|p=0} = \begin{pmatrix} \eta & 0 \\ \eta \cdot C_3 & \eta \end{pmatrix} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \underline{Q}^n = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \eta & 0 \\ \eta C_3 \cdot n & \eta \end{pmatrix} \quad (C_3 = 8\pi^2) \quad (4.96)$$

Weder diese Reihe noch die durch Multiplikation von rechts mit der Matrix der Anfangsbedingungen (92) für $p^\mu = 0$ daraus abgeleitete, in (94) gesuchte Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underline{Q}^n_{|p=0} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -i\eta \\ -i\eta & -i\eta C_3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\Lambda^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} 0 & -i\eta \\ -i\eta & -i\eta C_3 \cdot (n+1) \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\Lambda^2} \quad (4.97)$$

sind konvergent.

Das Fehlen eines genügend kleinen Entwicklungsparameters $\bar{\alpha}$, der $\|Q\| < 1$ sicherstellte, verhindert es also, wie bei der Strahlungskorrektur erster Ordnung des Photonpropagators in der Quantenelektrodynamik vorzugehen. Dort wird der vollständige Propagator ebenfalls aus einer geometrischen Folge von Blasengraphen gewonnen, wobei mit jedem eingesetzten Loop der Vakuumpolarisation die Feinstrukturkonstante $\alpha \ll 1$ als Faktor auftritt (vgl. [5] S. 324). Die Reihe des Photonpropagator kann deswegen konvergieren. Wir sprachen bereits die Gründe an, weshalb in der hier untersuchten Spinortheorie ein passendes $\bar{\alpha}$ nicht gefunden werden kann. Es sei angemerkt, daß auf dem Weg zur effektiven Feldtheorie des zusammengesetzten Vektorpotentials A^μ und des ihm zugeordneten Multiplikatorfeldes λ_μ keine solchen Konvergenzschwierigkeiten während der Funktionalintegration über die Polfelder sichtbar wurden. Allerdings war das Aufheben der klassischen Wirkung $\int d^4x A^\mu \lambda_\mu$ infolge der entsprechenden 1-Schleifen-“Korrektur” entscheidend und verhinderte aus dieser Sicht die Existenz eines Entwicklungsparameters $\bar{\alpha}$.

Bevor wir über einen Ausweg nachdenken, wollen wir $\underline{Q}$ aus (93) als Tensorprodukt nach den Projektoren Π, L zerlegen:

$$\underline{Q} := G \otimes \Pi + H \otimes L$$

$$\text{mit } G = \begin{pmatrix} 1 + p^2 C_2 & p^2 C_1 \\ C_3 + p^2 C_4 & 1 + p^2 C_2 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C_3 + p^2 C_5 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.98)$$

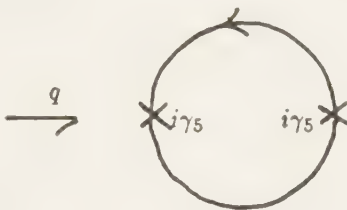
$\Rightarrow$

$$\underline{Q}^\lambda = G^\lambda \otimes \Pi + H^\lambda \otimes L \quad (4.99)$$

was noch stärker verdeutlicht, daß $\sum_{\lambda=0}^{\infty} Q^{\lambda}$ auch für $p^{\mu} \neq 0$ divergent bleibt.

Wenngleich die geometrische Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} x^{\nu}$ ($\nu \in \mathbb{R}$) nur innerhalb des Konvergenzkreises $|x| < 1$ gegen die rationale Funktion $g(x) = (1-x)^{-1}$ strebt, existiert $g(x)$ überall in der komplexen x -Ebene mit Ausnahme der Polstelle bei $x = 1$. Wird x durch eine Matrix $\underline{x}$ ersetzt, dann hat $(1 - \underline{x})$ ein Inverses, falls der Eigenwert 1 ausbleibt. Um schließlich doch noch die Reihen $\star \square \triangle$ erklären zu können, machen wir von der analytischen Fortsetzung der geometrischen Reihe über ihr Konvergenzgebiet $\|x\| < 1$ hinaus Gebrauch.

Ein ähnlicher Weg wurde von Nambu und Jona-Lasinio [16] bei der Berechnung kollektiver Bindungszustände auf der Grundlage einer chiral invarianten Theorie verfolgt. Die in der Leiterapproximation untersuchte "Nukleon-Nukleon-Streuamplitude" besteht – wie oben – aus der Summe von Austauschgraphen, in denen das spezielle 1-Schleifen-Diagramm

$$J_P(q) = \left\{ \xrightarrow{q} \begin{array}{c} \text{---} \times i\gamma_5 \quad i\gamma_5 \times \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\} \cdot i \quad (4.100)$$


n -fach iteriert wurde (in unserem Modell stehen sogar drei verschiedene Loop-Diagramme zur Verfügung). Andererseits schreibt eine Selbstkonsistenzbedingung den Wert $J_P(0) = 1$ vor, was eine nichtverschwindende Selbstenergie der Fermionen dieses Modells bedeutet. Die Propagatorreihe $\sum_{n=0}^{\infty} (J_P(q))^n$ konvergiert dann zwar auch nicht gegen $(1 - J_P(q))^{-1}$; gleichwohl wird ihr in [16] dieser Grenzwert zugewiesen. Wenn wir genauso vorgehen, entsteht:

$$\begin{aligned} \sum_{L=0}^{\infty} Q^L &= (\eta - \underline{Q})^{-1} = \{(1 - G) \otimes \Pi + (1 - H) \otimes L\}^{-1} \\ &= \frac{1}{1 - G} \otimes \Pi + \frac{1}{1 - H} \otimes L \end{aligned} \quad (4.101)$$

Aber während

$$\frac{1}{1 - G} = \begin{pmatrix} -p^2 C_2 & -p^2 C_1 \\ -C_3 - p^2 C_4 & -p^2 C_2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} -p^2 C_2 & p^2 C_1 \\ C_3 + p^2 C_4 & -p^2 C_2 \end{pmatrix}}{-p^2 C_1 C_3 + (p^2)^2 (C_2^2 - C_1 C_4)} \quad (4.102)$$

definiert ist, gelingt es nicht, $(1 - H)$ zu invertieren. Dies ist die zweite Schwierigkeit, der wir bei der Berechnung der Spinor-Spinor-Streuamplitude begegnen. Um weiterzukommen, wird die Lagrangedichte (82) durch einen eichfixierenden Term

$$\mathcal{L}_{\text{fix}} = -\frac{\lambda}{2} (\partial \cdot A)^2 \quad (\text{Lorentz - Eichung}) \quad (4.103)$$

ergänzt, zumal (82) unabhängig vom Fehlen der Maxwell-Lagrangedichte

$$-\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2$$

die $U(1)$ -Eichinvarianz besitzt. Wie die Elimination der Hilfsfelder A^μ, λ_μ in der so erweiterten klassischen Lagrangedichte sofort bestätigt, liefert die Eichfixierung eine zusätzliche, zu λ proportionale 4-Spinor-Wechselwirkung mit Ableitungskopplung, die in unserem Modell anfangs gar nicht vorgesehen war. Die Invarianz des Spinormodells unter lokalen Phasentransformationen verlangt natürlich, daß man sich bei der Pfadintegralformulierung der effektiven Theorie für eine bestimmte Eichung entscheidet. Die Unabhängigkeit physikalischer Größen vom Eichparameter λ wird erwartet. Die nachträgliche Wahl einer Eichbedingung findet man auch bei Witten [17] in einer Arbeit zur $1/N$ -Entwicklung von 2-dimensionalen Theorien mit klassischem Hilfseichfeld A^μ . Ebenso hat Saller in [18] die Eichung für eine verwandte Spinortheorie mit Hilfsfeld A_μ festgelegt.

Die erweiterte freie Wirkung der Hilfsfelder lautet daher:

$$\frac{1}{2} \int d^4x (A_\mu(x) \quad , \quad \lambda_\mu(x)) \cdot \begin{pmatrix} \lambda \partial^\mu \partial^\nu & g^{\mu\nu} \\ g^{\mu\nu} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_\nu(x) \\ \lambda_\nu(x) \end{pmatrix} \quad (4.104)$$

Durch Inversion folgt die Propagatormatrix:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \begin{pmatrix} A^\mu(x) A^\nu(y) & \lambda^\mu(x) A^\nu(y) \\ A^\mu(x) \lambda^\nu(y) & \lambda^\mu(x) \lambda^\nu(y) \end{pmatrix} | 0 \rangle &= \left\{ \frac{i}{\begin{pmatrix} \lambda \partial \otimes \partial & g \\ g & 0 \end{pmatrix}} \right\}^{\mu\nu} \delta^{(4)}(x-y) \\ &= i \int \frac{d^4p}{N} \begin{pmatrix} 0 & g^{\mu\nu} \\ g^{\mu\nu} & \lambda p^\mu p^\nu \end{pmatrix} \cdot e^{-ip(x-y)} \end{aligned} \quad (4.105)$$

Zu den bisherigen Feynmanregeln (83) tritt noch der diagonale λ_μ -Propagator ("L-Linie"):

$$i\lambda p^\mu p^\nu = i\lambda p^2 L^{\mu\nu} \quad \triangleq \quad \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \quad \mu \quad \nu \quad (4.106)$$

In den vorangegangenen Überlegungen sind jetzt L-Linien und K-Linien (83b) gleichberechtigt; an der Kettenstruktur der Teilamplitude $T^{(4)}(\dots)$ halten wir fest. Anstelle von (90) erhalten wir:

$$\begin{aligned} T^{(4)}(p, \tilde{p}) &= \left(\begin{array}{c} \text{---} C \\ \text{---} \text{---} A \end{array} , \quad \Lambda^2 \begin{array}{c} \text{---} C \\ \text{---} \text{---} A \end{array} \right) \underline{\underline{M}}(p) \left(\begin{array}{c} D \\ \text{---} B \\ \text{---} D \\ \text{---} B \end{array} \right) \ominus (C \leftrightarrow D; p \leftrightarrow \tilde{p}) \\ &= i \left(\begin{array}{c} \text{---} C \\ \text{---} \text{---} A \end{array} , \quad \begin{array}{c} \text{---} C \\ \text{---} \text{---} A \end{array} \right) \underline{\underline{K}}(p) \left(\begin{array}{c} D \\ \text{---} B \\ \text{---} D \\ \text{---} B \end{array} \right) \ominus (C \leftrightarrow D; p \leftrightarrow \tilde{p}) \end{aligned} \quad (4.107a)$$

mit

$$\begin{aligned} \underline{\underline{M}}(p) &= \begin{pmatrix} 0 & \text{wavy} \\ \text{wavy} & \text{dashed} \cdot \Lambda^{-2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{box} & \text{box} \\ \text{box} & \text{box} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \text{wavy} \\ \text{wavy} & \text{dashed} \cdot \Lambda^{-2} \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & \text{wavy} \\ \text{wavy} & \text{dashed} \cdot \Lambda^{-2} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\Lambda^2} \end{aligned} \quad (4.107b)$$

Für später verwenden wir die Abkürzung:

$$\underline{\underline{R}} := \begin{pmatrix} 0 & \text{wavy} \\ \text{wavy} & \text{dashed} \cdot \Lambda^{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i\eta \\ i\eta & i\lambda \frac{p^2}{\Lambda^2} L \end{pmatrix} \quad (4.107c)$$

(Die Matrizenmultiplikation ist auch in die Indizes tragenden Graphen und Kästen fortzusetzen).

Da inzwischen die in den Kästen  enthaltenen Loops auch durch L-Linien verkettet sein können, hat man eine verallgemeinerte Matrix $\underline{\underline{Q}}$ (siehe (91)):

$$\begin{aligned} \underline{\underline{Q}} &= \begin{pmatrix} \text{loop with wavy} & \text{loop with wavy} \cdot \Lambda^{-2} \\ & + \text{loop with dashed} \cdot \Lambda^{-2} \\ \text{loop with wavy} \cdot \Lambda^2 & \text{loop with wavy} \\ & + \text{loop with dashed} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \eta + p^2 \Pi C_2 & p^2 \Pi C_1 + \lambda \frac{p^2}{\Lambda^2} L \\ \eta C_3 + p^2 (\Pi C_4 + L C_5) & \eta + p^2 \Pi C_2 + \lambda \frac{p^2}{\Lambda^2} (C_3 + p^2 C_5) L \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \text{loop with wavy} & \text{loop with wavy} \\ \text{loop with wavy} & \text{loop with wavy} \end{pmatrix} \cdot \Lambda^{-2} \cdot \begin{pmatrix} \text{loop with wavy} & \text{loop with wavy} \\ \text{loop with wavy} & \text{loop with wavy} \end{pmatrix} \cdot \Lambda^2 \cdot \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{R}} \end{aligned} \quad (4.108)$$

Mit (94) läßt sich $\underline{\underline{M}}$ rasch auf die unter (85) aufgezählten 1-Loop-Amplituden zurückführen:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{M}} &= \underline{\underline{R}} \frac{\eta}{\eta - \underline{\underline{U}} \underline{\underline{R}}} \underline{\underline{U}} \cdot \Lambda^{-2} \underline{\underline{R}} + \underline{\underline{R}} \cdot \Lambda^{-2} \\ &= \Lambda^{-2} \cdot \underline{\underline{R}} \frac{\eta}{\eta - \underline{\underline{U}} \underline{\underline{R}}} = \frac{\Lambda^{-2}}{\underline{\underline{R}}^{-1} - \underline{\underline{U}}} \\ &= \Lambda^{-2} \left\{ \begin{pmatrix} i p^2 L \frac{\lambda}{\Lambda^2} & -i\eta \\ -i\eta & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{loop with wavy} & \text{loop with wavy} \\ \text{loop with wavy} & \text{loop with wavy} \end{pmatrix} \cdot \Lambda^{-2} \cdot \begin{pmatrix} \text{loop with wavy} & \text{loop with wavy} \\ \text{loop with wavy} & \text{loop with wavy} \end{pmatrix} \cdot \Lambda^2 \right\}^{-1} \\ &= i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Lambda^{-2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -i \text{loop with wavy} & -p^2 L \lambda & -i \text{loop with wavy} + \eta \\ -i \text{loop with wavy} + \eta & & -i \text{loop with wavy} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Lambda^{-2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ (vgl. (107a)):

$$\underline{\underline{K}} = \begin{pmatrix} -i \text{ (loop)} & -p^2 L \lambda & -i \text{ (loop)} + \eta \\ -i \text{ (loop)} + \eta & & -i \text{ (loop)} \end{pmatrix}^{-1} \quad (4.109)$$

Man überprüft sofort (benutze (85)), daß

$$\mathcal{L}_{eff}^{(2)} := \int \frac{d^4 p}{N} (A^\mu(p) \quad , \quad \lambda^\mu(p)) \cdot (\underline{\underline{K}}^{-1})_\mu{}^\nu(p) \cdot \begin{pmatrix} A_\nu(-p) \\ \lambda_\nu(-p) \end{pmatrix} \quad (4.110)$$

mit den im Verbundfeld A^μ und dem Multiplikatorfeld λ_μ bilinearen Termen der effektiven Wirkung (25) übereinstimmt, wenn der Eichfixierungsterm hinzugefügt wird. Die freie effektive Propagatormatrix $i \cdot \underline{\underline{K}}$ kann jetzt als (unendliche) Summe der verschiedenen Kettengraphen mit 1-Loop-Einsätzen verstanden werden, welche in der nichtlinearen Spinortheorie gemäß den Feynmanregeln (83), (106) gebildet werden können. Der durch eine Grassmann-Funktionalintegration über die Spinorpolfelder $\psi_i (i \in \{M, \Lambda, -\Lambda\})$ gewonnene Propagator $K_{\mu\nu}(p)$ beinhaltet daher nicht die weiteren Kettengraphen, welche aus Fierz-Transformationen der ursprünglichen 4-Spinor-Selbstwechselwirkung stammen. In analytischer Form erhält man:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{K}}^{-1} &= \begin{pmatrix} -p^2 C_1 \Lambda^2 \Pi - p^2 L \lambda & -p^2 C_2 \Pi \\ -p^2 C_2 \Pi & -\eta \frac{C_3}{\Lambda^2} - \frac{p^2}{\Lambda^2} (\Pi C_4 + L C_5) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -p^2 C_1 \Lambda^2 & -p^2 C_2 \\ -p^2 C_2 \Pi & -\frac{C_3}{\Lambda^2} - \frac{p^2 C_4}{\Lambda^2} \end{pmatrix} \otimes \Pi + \begin{pmatrix} -p^2 \lambda & 0 \\ 0 & -\frac{C_3}{\Lambda^2} - \frac{p^2 C_5}{\Lambda^2} \end{pmatrix} \otimes L \end{aligned} \quad (4.111)$$

$\Rightarrow$

$$\underline{\underline{K}} = \begin{pmatrix} \frac{\Pi(1+p^2 \frac{C_4}{C_3})}{p^2 \frac{\Lambda^2}{C_3} \cdot \Delta(p)} - \frac{L}{p^2 \cdot \lambda} & -\Pi \cdot \frac{C_2}{\Delta(p)} \\ -\Pi \frac{C_2}{\Delta(p)} & \Pi \frac{C_1 \Lambda^2}{\Delta(p)} - L \frac{\Lambda^2}{p^2 C_5 + C_3} \end{pmatrix} \quad (4.112)$$

wobei

$$(C_2^2 - C_1 C_4) p^2 - C_1 C_3 = \Delta(p) \quad (4.113)$$

gesetzt wurde.

Wir kontrollieren den Einfluß des willkürlichen Parameters λ aus (103) auf die physikalische Streuamplitude $T^{(4)}(\dots)$. Der einzige von ihm abhängende Beitrag ist nach (112), wenn die äußeren Linien entfernt wurden und dafür die normierten Dirac-Spinoren angebracht wurden (vom Austauschterm $C \leftrightarrow D$ wird abgesehen):

$$\begin{aligned} & i \cdot \begin{array}{c} \text{Diagram: A central vertex with four external lines. Top-left: incoming line with momentum } (-p+q) \text{ and label } C. \text{ Bottom-left: incoming line with momentum } q \text{ and label } A. \text{ Top-right: outgoing line with momentum } (r+p) \text{ and label } D. \text{ Bottom-right: outgoing line with momentum } r \text{ and label } B. \text{ The central vertex is labeled } \left(\frac{-L}{p^2 \lambda} \right). \end{array} \quad (4.114) \\ & = \delta_{AC} \epsilon_A \delta_{BD} \epsilon_B \cdot \frac{i}{(p^2)^2 \lambda} \bar{u}_C(q-p) \not{p} u_A(q) \cdot \bar{u}_D(p+r) \not{p} u_B(r) \end{aligned}$$

Falls die mit A, B, C, D bezeichneten Polfelder ψ_i sich auf ihren Massenschalen befinden, d.h.

$$(\not{q} - m_A)u_A(q) = 0$$

bestehen, dann verschwindet (114) jedoch. Denn es gilt z. B.:

$$\begin{aligned} &\bar{u}_C(q-p)\not{p}u_A(q)\delta_{AC} \\ &= \delta_{AC} \{ \bar{u}_A(q-p)((\not{q} - m_A) - (\not{q} - \not{p} - m_A))u_A(q) \} = 0 \end{aligned}$$

Die Rekursionsgleichung (91) ist einer Dyson-Gleichung äquivalent vorausgesetzt, daß die Reihen welche wir mit  bezeichnet haben, auch konvergieren. Um dies vorzuführen, schreiben wir (91) in der Kurzform

$$C_{L+1} = \underline{\underline{Q}} \cdot C_L \tag{4.115}$$

Die Matrix C_1 genüge den Anfangsbedingungen (92). Dies bedeutet für $C = \sum_{L=1}^{\infty} C_L$ dann:

$$C = \underline{\underline{Q}} \cdot C + C_1 \tag{4.116}$$

Es handelt sich um die gewünschte inhomogene Dyson-Gleichung; sie beruht wesentlich auf verschiedenen bereits diskutierten Näherungen (lediglich kettenförmige Austauschgraphen etc.). Die physikalische Interpretation des Ergebnisses (112) verschieben wir auf den nachfolgenden Unterabschnitt.

4.3.2. MASSELOSER VEKTORTEILCHEN-AUSTAUSCH UND EFFEKTIVE KOPPLUNG BEI SCHWACHER STREUUNG

$T^{(4)}(p, \bar{p})$ in (107a) beruht auf der Näherung, die iterierten 1-Schleifen-Diagramme mit zwei äußeren Vertizes bereits bei den im einlaufenden Impuls quadratischen Gliedern abubrechen. Die verschiedenen Teilamplituden, welche nach den an Kettenenden befindlichen Spinor-Spinor-Vertizes  bzw.  eingeteilt werden können, sind abgesehen von Normierungsfaktoren freien Stückelberg-Bosonpropagatoren für Spin-1-Teilchen gleich. Die kanonische bilineare Lagrangedichte eines massiven (μ) Vektorfeldes G_ν mit einer Stückelberg-Eichfixierung

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu G_\nu - \partial_\nu G_\mu)^2 - \frac{\lambda}{2} \cdot (\partial \cdot G)^2 + \frac{\mu^2}{2} G^2 \tag{4.117}$$

führt zum freien Propagator ($\lambda > 0$):

$$D(p; \mu, \lambda) = -i \left\{ \frac{\Pi}{p^2 - \mu^2 + i\epsilon} + \frac{L}{\lambda(p^2 - \mu^2/\lambda + i\epsilon)} \right\} \tag{4.118}$$

Damit läßt sich $T^{(4)}(p, \bar{p})$ nach einer Partialbruchzerlegung als

$$\begin{aligned}
 T^{(4)}(p, \bar{p}) = & \left\{ \begin{array}{l} \text{Diagram 1} \cdot \Lambda^4 g_{\lambda\lambda}^2 D(p; m, \lambda') + \text{Diagram 2} \cdot \Lambda^2 g_{\lambda A}^2 \frac{-i\Pi}{p^2 - m^2} \\ + \text{Diagram 3} \cdot \Lambda^2 g_{\lambda A}^2 \frac{-i\Pi}{p^2 - m^2} \\ + \text{Diagram 4} \cdot \left(g^2 D(p; 0, \frac{\lambda}{C_1 \cdot \Lambda^2}) + g_{AA}^2 \frac{i\Pi}{p^2 - m^2} \right) \end{array} \right\} \\
 & \ominus (B \leftrightarrow D; p \leftrightarrow \bar{p})
 \end{aligned} \tag{4.119}$$

darstellen. Zu diesem Zweck haben wir die Abkürzungen

$$\begin{aligned}
 m^2 &= \frac{C_1 C_3}{C_2^2 - C_1 C_4} & g_{\lambda\lambda}^2 &= \frac{-C_1 \Lambda^{-2}}{C_2^2 - C_1 C_4} & g_{\lambda A}^2 &= \frac{C_2 \Lambda^{-2}}{C_2^2 - C_1 C_4} \\
 \lambda' &= \frac{-C_1 C_5}{C_2^2 - C_1 C_4} & g^2 &= \frac{1}{\Lambda^2 \cdot C_1} & g_{AA}^2 &= \frac{-C_2^2}{(C_2^2 - C_1 C_4) \cdot C_1 \cdot \Lambda^2}
 \end{aligned} \tag{4.120}$$

eingeführt. Verwendet man die bekannten Werte der Konstanten C_i (siehe (87)) und setzt noch

$$\varrho := \frac{M^2}{\Lambda^2}, \quad \epsilon = \ln \frac{1}{\varrho}, \quad g^2 = \left(\frac{\sum_A \ln(\frac{\Sigma_A^2}{m_A^2})}{12\pi^2} \right)^{-1} \tag{4.121}$$

dann bekommt man für (120) explizit:

$$\begin{aligned}
 m^2 &= \frac{-3\Lambda^2}{2\epsilon - \frac{7}{3} - \frac{g^2}{6\pi^2} \frac{\epsilon^2}{(1-\varrho)^2}} = -8\pi^2 \Lambda^2 g_{\lambda\lambda}^2 = -3\Lambda^2 \lambda' \\
 g_{\lambda A}^2 &= \frac{-3g^2}{12\pi^2 (2 - \frac{7}{3\epsilon})(1-\varrho) - 2g^2 \frac{\epsilon}{(1-\varrho)}} \\
 g_{AA}^2 &= \frac{g^4}{\frac{6\pi^2}{\epsilon} (2 - \frac{7}{3\epsilon})(1-\varrho)^2 - g^2}
 \end{aligned} \tag{4.122}$$

Diese umfangreichen Ausdrücke vereinfachen sich beträchtlich, wenn man zum Grenzfall $\varrho \rightarrow 0$ übergeht und $g^2 \ll 1$ annimmt, was bei Regulatormassen Σ_A zutrifft, welche die Massenparameter M, Λ (in der Größenordnung der Planckmasse) der nichtlinearen Spinortheorie weit übertreffen; geht man außerdem noch von $g^2 \cdot \epsilon \rightarrow 0$ aus, dann lauten die asymptotischen Formeln:

$$\begin{aligned}
 m^2 &\rightarrow \frac{-3\Lambda^2}{2\epsilon} & g_{\lambda\lambda}^2 &\rightarrow \frac{3}{16\pi^2 \epsilon} & g_{\lambda A}^2 &\rightarrow -\frac{g^2}{8\pi^2} < 0 \\
 g_{AA}^2 &\rightarrow \frac{g^4 \epsilon}{12\pi^2} & \lambda' &\rightarrow \frac{1}{2\epsilon}
 \end{aligned} \tag{4.123}$$

Davon unabhängig besitzt die Streuamplitude $T^{(4)}(p, \bar{p})$ Polstellen bei $p^2 = 0$ und $p^2 \sim \Lambda^2$; die mit ihnen verknüpften Residuen haben die Bedeutung von (Kopplungskonstanten)² (bis auf einfache Proportionalfaktoren). Wir beschäftigen uns nicht weiter mit den massiven Austauschmoden.

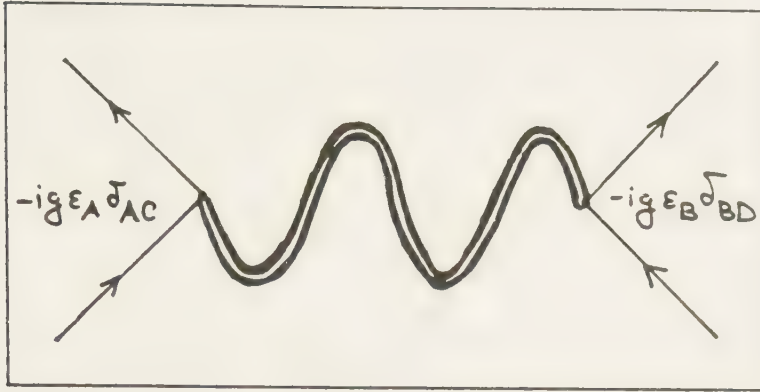


Abb. 11: Das effektive Ersatzdiagramm für die Streuung von Polfeldern mit sehr kleinem Streuwinkel. Photonaustausch vermittelt die Wechselwirkung.

Da Λ eine Energieskala des subkanonischen Spinorfeldes $\tilde{\chi}$ darstellt, erwarten wir dort eigentlich keine Bindungszustände, sondern sehen nur die nichtlineare Spinorthorie (2.90b) als zutreffende Beschreibung dieses Energiebereichs an. Wegen $m^2/g_{\lambda\lambda}^2 < 0$ hat man es im Rahmen unserer Näherungen dabei entweder mit Geistzuständen oder aber mit Tachyonen zu tun.

Bei schwacher Streuung der einlaufenden Felder ψ_i sind die an den Λ^2 -Pol gebundenen Austausch-Amplituden vernachlässigbar gegenüber der Emission einer masselosen Photonmode. Diese koppelt mit der universellen Stärke (siehe Bild 11)

$$g = \sqrt{\frac{1}{\Lambda^2 \cdot C_1}} \quad (4.124)$$

an alle Polfeldströme $\bar{\psi}_i \gamma^\alpha \psi_i \epsilon_i$.

An dieser Stelle können wir noch nicht dem Einwand begegnen, daß die hier betrachteten Polfelder, deren Linearkombination zum subkanonischen Spinorfeld $\tilde{\chi}$ führt, eigentlich in einem Streuprozess mit physikalischen ein- bzw. auslaufenden Teilchen fehl am Platz sind, da $\tilde{\chi}$ nur als Wahrscheinlichkeitsamplitude jedoch nicht als Elementarteilchenfeld begriffen werden soll (vgl. (2.42) und den nachfolgenden Text). Eine Antwort auf diese Frage wird im 7. Kapitel gegeben.

Jedenfalls ist g nicht allein durch die Massenparameter M (Niederenergieskala $\simeq$ Masse der schweren Vektorbosonen) und Λ ($\sim 10^{19}\text{GeV}$) festgelegt, sondern enthält noch verschiedene Abschneideskalen Σ_A , deren physikalische Deutung bislang aussteht. Die Verwendung eines subkanonischen Urspinorfeldes reichte also nicht aus, das Auftreten von 1-Loop-Divergenzen zu verhindern. Deshalb läßt sich g bzw. die Elementarladung, welche die Kopplung des Photonenfeldes A^μ an den 4-Strom J_μ angibt, innerhalb unseres Modells überhaupt nicht berechnen. Diese Aussage steht nun im Gegensatz zu einer Arbeit von H. Saller [2], wonach die Sommerfeld-Feinstrukturkonstante

$$\frac{e^2}{4\pi} = \alpha = \frac{3\pi}{\epsilon} \quad \left(\epsilon = \ln \left(\frac{\Lambda^2}{M^2} \right) \right) \quad (4.125)$$

bei einem kleinen Massenverhältnis $\rho \ll 1$ wird. In der dort angegebenen Herleitung wird das

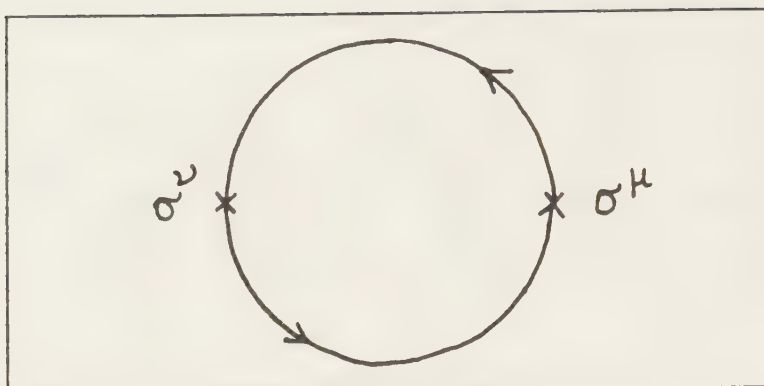


Abb. 12: 1-Schleifendiagramm in Heisenbergs nichtlinearer Spinortheorie mit einem subkanonischen Spinorpropagator

“ $\leftarrow \bigcirc \rightarrow$ ”.

1-Schleifen-Diagramm der Vakuumpolarisation übergangen, welches wir mit den Cutoffs Σ_A regularisieren mußten.

Hier sind auch die Überlegungen von W. Heisenberg [7] zu erwähnen, wonach eine Beschreibung der starken Wechselwirkung mit einer nichtlinearen Feldgleichung vom Typ

$$i\sigma^\nu \partial_\nu \chi + l^2 \cdot \sigma^\nu : \chi \chi^* \sigma_\nu \chi : = 0 \quad (4.126)$$

angestrebt wird. l ist eine charakteristische Länge wie z. B. der Kerndurchmesser, χ bedeutet das Nukleonenfeld. Die Pion-Nukleon-Kopplungskonstante $f_{\pi NN}$ wird — wie oben vorgeführt — in der Leiterdiagramm-Näherung bestimmt: es kommt allerdings nur die Iteration einer einzigen 1-Schleifen-Amplitude (siehe Bild 12) in Frage; die damit gebildete Reihe von Austausch-Kettengraphen besitzt eine Polstelle bei $p^2 = \kappa_B^2$ der Pionmasse. Mit κ zur Bezeichnung der Nukleonmasse folgt schließlich:

$$f_{\pi NN}^2 \simeq 4\pi^2 \frac{\kappa_B^2}{\kappa^2} \quad (4.127)$$

Unsere $U(1)$ -Modelleichtheorie unterscheidet sich aber durch das Auftreten von drei 1-Schleifen-Amplituden (85a-c) und die erforderliche Regularisierung grundlegend von einer Dynamik nach (126).

Wir zeigen ausführlich, wo die von H. Saller durchgeführte Ableitung fehlerhaft ist und wie nach geeigneten Verbesserungen sich erneut die Kopplungsstärke g aus (124) herausstellt.

Mit den bilinear zusammengesetzten Operatoren

$$\begin{aligned} A_c^\mu &= 8\pi^2 : \bar{\psi}_i \gamma^\mu \psi_j : h_{ij} \\ J_c^\mu &= \sum_A : \bar{\psi}_A \gamma^\mu \psi_A : \epsilon_A \end{aligned} \quad (4.128)$$

werden zuerst die Übergangsmatrixelemente

$$\begin{aligned} S_{A^\mu} &= \langle 0 | A_c^\mu(x) | B \rangle \\ S_{J^\mu} &= \langle 0 | J_c^\mu(x) | B \rangle \end{aligned} \quad (4.129)$$

gebildet. Darin ist $|B\rangle$ ein bosonischer In-Zustand, der im Hinblick auf unsere fundamentale nichtkanonische Spinordynamik mit den Erzeugungsoperatoren $b_\alpha^{i\dagger}(k), d_\beta^{j\dagger}(k')$ (vgl. (2.42) zur Polfeldentwicklung) aus dem Grundzustand $|0\rangle$ gewonnen werden kann. Der Einfachheit wegen nehmen wir

$$|B\rangle = b_{\text{in}\alpha}^{(i)\dagger}(k) d_{\text{in}\beta}^{(j)\dagger}(k') |0\rangle \quad (4.130)$$

an.

$S_{A\mu}, S_{J\mu}$ genügen der inhomogenen Bethe-Salpeter-Gleichung. Ohne nach mathematischer Rechtfertigung zu fragen, ersetzen wir den vollständigen Wechselwirkungsintegralkern (dieses 4-Fermionen-Diagramm hat nach dem Zerschneiden zweier beliebiger innerer Fermionlinien immer noch eine Baumgraphenverbindung zwischen dem ein- und auslaufenden Linienteil) durch die klassisch auftretenden Selbstwechselwirkungsdiagramme (Fierz-transformierte Terme werden ausgeklammert):



und

(4.131)

Letzteres rührt von der in (103) eingeführten linearen Eichfixierung her. Die Feynman-Propagatoren sind unter (83b) bzw. (106) nachzulesen. In dieser sogenannten Leiterapproximation bestehen zwei Rekursionsbeziehungen für die Fouriertransformierten der translationsinvarianten Übergangsmatrixelemente aus (129):

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - k - k') \begin{Bmatrix} \tilde{S}_A(p) \\ \tilde{S}_J(p) \end{Bmatrix} := \int d^4x \begin{Bmatrix} S_{A\mu}(x) \\ S_{J\mu}(x) \end{Bmatrix} \cdot e^{ipx} \quad (4.132)$$

Es sind dies (auf die Frage, ob $S_{A\mu}, S_{J\mu}$ wohldefiniert sind, wird nicht eingegangen):

$$\begin{pmatrix} \tilde{S}_A(p) \\ \tilde{S}_J(p) \end{pmatrix} = \left(\text{diagrams} \right) (p) \cdot \begin{pmatrix} \tilde{S}_A(p) \\ \tilde{S}_J(p) \end{pmatrix} + i \cdot \begin{pmatrix} \text{diagram} \end{pmatrix} (p) \quad (4.133)$$

(The diagrams in the equation represent various self-energy and vertex corrections as shown in the image.)

(Die Verjüngung aneinandergrenzender Lorentz-Tensorindizes gehört zur Ausführung der Matrixmultiplikation)

Wir nennen eine weitere Näherung: Für die Matricelemente wurden 1-Schleifen-Diagramme mit freien, unrenormierten Polfeldpropagatoren benutzt.

Die Notation $\perp$, $\top$ im inhomogenen Term von (133) bedeutet Amputation der äußeren Linien und gleichzeitige Multiplikation des Vertex mit den normierten Spinoren $\bar{v}_j(k')$, $u_i(k)$ (vgl. (2.7)) von links bzw. von rechts. Dieser inhomogene Term gibt nämlich die Matricelemente (129) für freie Polfelder wieder und kann nach der LSZ-Reduktionsformel berechnet werden. Auf das Anbringen der Renormierungskonstanten $1/\sqrt{Z}$ bei jeder äußeren Linie haben wir allerdings verzichtet.

H. Saller nennt seine Rekursionsbeziehung "Eichbosonfeldgleichung". Es handelt sich um die erste Zeile des Systems (133) ohne den inhomogenen klassischen Term; außerdem wurde in [2] auf eine Eichfixierung verzichtet. Grundsätzlich ist gegen den Gebrauch einer homogenen Bethe-Salpeter-Gleichung nichts einzuwenden. Natürlich hätte auch der in $\tilde{S}_A(p)$, $\tilde{S}_J(p)$ homogene Teil der zweiten Zeile des Systems hinzugezogen werden können und müssen:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -p^2 C_2 & -\frac{C_3 + p^2 C_4}{\Lambda^2} \\ -p^2 C_1 \Lambda^2 & -p^2 C_2 \end{pmatrix} \otimes \Pi \right. \\ \left. + \begin{pmatrix} -\frac{\lambda}{\Lambda^2} p^2 (C_3 + p^2 C_5) & -\frac{C_3 + p^2 C_5}{\Lambda^2} \\ -\lambda p^2 & 0 \end{pmatrix} \otimes L \right\} (p) \cdot \begin{pmatrix} \tilde{S}_A(p) \\ \tilde{S}_J(p) \end{pmatrix} = 0 \quad (4.134)$$

Dabei haben wir die Ausdrücke (85) für die 1-Schleifen-Graphen benutzt. Falls die von p^μ abhängige Matrix singulär ist, liegt im Vektor der Übergangsmatricelemente $(\tilde{S}_A(p), \tilde{S}_J(p))^T$ eine Polstelle vor. Dies ist das Kennzeichen eines Bindungszustandes. Genau zu diesem Zweck wird die homogene Bethe-Salpeter-Gleichung auch eingesetzt. Wenn man die durch Quantenfluktuationen entstandene effektive Kopplung des Photonfeldes an den Strom der Polfelder ermitteln will, muß das inhomogene System (133) untersucht werden. Gerade wegen des vorhandenen inhomogenen Terms

$$i \cdot \left(\begin{array}{c} \top \\ \uparrow j, k' \\ \circ \\ \downarrow i, k \\ \perp \end{array} \quad \begin{array}{c} \top \\ \uparrow j, k' \\ \bullet \\ \downarrow i, k \\ \perp \end{array} \right) \quad (4.135)$$

ist die von H. Saller angegebene Feldgleichung

$$\left\{ \eta - \begin{array}{c} \circ \\ \uparrow \\ \circ \end{array} \right\} A(p) = \begin{array}{c} \circ \\ \uparrow \\ \circ \end{array} J(p) \quad (4.136)$$

Ursache von falschen Schlüssen (die c-Zahl-Vektoren $\tilde{S}_A(p)$, $\tilde{S}_J(p)$ ersetzte der Autor sogar noch durch zusammengesetzte Feldoperatoren A^μ , J_ν , welche den Übergang zwischen $|0\rangle$ und $|B\rangle$ vermitteln). In (136) wurde $J(x)$ als $U(1)$ -Noetherstrom gedeutet. Wir sehen dagegen anhand des vollständigen Systems (133), daß der inhomogene Beitrag (135) als der eigentliche Quellenterm wirkt.

Wir führen noch die Suche nach den invarianten Impulsquadraten ($p_\mu p^\mu$) zu Ende, die im homogenen System (134) den Eigenwert 0 gestatten. Wenn man sich dabei auf den durch Π -Projektion entstehenden transversalen Teilraum beschränkt, hat man als Bedingung:

$$0 = -p^2 \Delta(p) = C_1 C_3 p^2 \left(1 - \frac{p^2}{m^2}\right) \quad (4.137)$$

Ein masseloser Bindungszustand wird deshalb erwartet.

Genauer stellt sich nach der Inversion von (133) heraus:

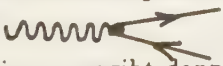
$$\begin{pmatrix} \tilde{S}_A(p) \\ \tilde{S}_J(p) \end{pmatrix} = i \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{g^2 \Lambda^2}{p^2 - m^2} & -\frac{g^2}{p^2} + \frac{g^2 \Lambda^2}{p^2 - m^2} \\ -\frac{g \Lambda^2}{p^2 - m^2} & -\frac{g^2 \Lambda^2}{p^2 - m^2} \end{pmatrix} \otimes \Pi \right. \\ \left. + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\lambda p^2} \\ -\frac{\Lambda^2}{C_3 + p^2 C_5} & 1 \end{pmatrix} \otimes L \right\} \cdot \begin{pmatrix} \text{---} \\ \uparrow j, k' \\ \text{---} \\ \uparrow i, k \\ \text{---} \end{pmatrix} (p) \quad (4.138)$$

Bezogen auf den transversalen Teil herrscht Übereinstimmung mit den effektiven Austauschpropagatoren von (112) oder (119). Nur im Matrixelement $\tilde{S}_A(p)$ (p^μ ist der 4-Impuls des bosonischen In-Zustands $|B\rangle$) liegt im Grenzfall $p^2 \rightarrow 0$ ein Pol vor. Er entsteht bei der Kopplung an den transversalen Anteil des Quellterms

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \uparrow j, k', \beta \\ \bullet \\ \downarrow i, k, \alpha \\ \text{---} \end{array} \mu = (-i) \delta_{ij} \bar{v}_{(\beta)}^{(j)}(k') \gamma^\mu u_{(\alpha)}^{(i)}(k) \epsilon_i$$

Das Residuum dazu ist

$$g^2 = \frac{1}{\Lambda^2 C_1}$$

Wenn also die Leiterdiagramme der 1-Schleifen-Näherung berücksichtigt werden, erwirbt das bilinear zusammengesetzte Feld $A_\mu^c(x)$ einen Propagator als masseloses Spin-1-Teilchen, der zum Vertex  läuft. Der transversale kinetische Term enthält den Faktor g^{-2} . Eine Umskalierung ergibt dann die (normierte) Maxwell-Lagrangedichte. Gleichzeitig erscheint ein Faktor g in der Feld-Strom-Kopplung als induzierte Kopplungskonstante. Wie schon geschildert wurde, hängt g von unbekannten Abschnide-Parametern ab und deshalb scheitert die Berechnung der Sommerfeld-Konstante α mit dem hier betrachteten Modell.

5. Zusammengesetztes U(1)-Eichboson nach einem Vorschlag von Amati et al

5.1. SPINORLAGRANGEDICHTE UND EICHFELDDEFINITION MITTELS DES ABLEITUNGS-OPERATORS

Ein Operatorprodukt aus Spinorfeldern, das ein elementares Vektorpotential A^μ vertreten soll, muß bei einer $U(1)$ -Eichtransformation proportional zum Gradienten der lokalen Phase $\alpha(x)$ variieren. Im vorhergehenden Kapitel erreichten wir dieses Ziel durch eine Punkttrennungs-Regularisierung in den Raum-Zeit-Koordinaten der subkanonischen Feldoperatoren $\tilde{\chi}(x), \bar{\tilde{\chi}}(x)$ ($x \mapsto x \pm (\frac{\xi}{2})$). Deshalb ergab sich nach einer Umeichung des Operatorprodukts ein inhomogener Term $\sim (\xi \cdot \partial\alpha)$ in niedrigster Ordnung. Als begleitender Faktor stand die 2-Punkt-Green-Funktion des Feldes $\tilde{\chi}$ zur Verfügung, die nahe $\xi^2 = 0$ wie $(\frac{\xi}{\xi^2})$ divergiert. Beim anschließenden Grenzübergang $\xi \rightarrow 0$ blieb daher der inhomogene Beitrag erhalten. Die eben skizzierte Methode, das Eichfeld A^μ zu konstruieren, wurde in den Arbeiten von H. P. Dürr [1] und H. Saller [2] bevorzugt. Der Lorentz-Vektorcharakter von A^μ wurde in diesem Fall mit Hilfe der Dirac-Matrizen γ^μ verwirklicht.

Andererseits steht für die Bildung des Verbundfeldes A^μ noch der partielle Ableitungsoperator ∂_μ zur Verfügung (vgl. auch Bemerkungen in Abschnitt 2.1). Neben seiner Eigenschaft, ein 4-Vektor zu sein, "registriert" er ebenfalls lokale Phasenunterschiede bei einer Umeichung der Spinor-Felder. Diese Möglichkeit, ein zusammengesetztes Hilfsfeld A^μ zu finden, wird ausführlich von Amati et al [3] und in [4] (D. Amati mit G. Veneziano) besprochen. Die Variation $\delta A_\mu = \partial_\mu \alpha$ kann jetzt ohne die Regularisierung mit Punkttrennung vorgenommen werden. Um dem Operatorprodukt mit identischen Argumenten der Konstituentenfelder (in den Arbeiten von Amati et al handelt es sich um ein kanonisches Diracfeld ψ der Dimension $\frac{3}{2}$) einen Sinn zu geben, kommt man doch nicht ohne eine Regularisierung aus, die eine ausreichende Verringerung der Felddimension hervorruft. Divergenzen der 2-Punkt-Greenfunktion werden durch die Benutzung der Pauli-Villars-Regularisierung (PV) (vgl. auch Anhang B) vermieden.

Das hermitesche Operatorprodukt

$$A_\mu := \frac{1}{v} \bar{\psi} i \vec{\partial}_\mu \psi; \quad \left(f \vec{\partial}_\mu g = \frac{1}{2} (f g_{,\mu} - f_{,\mu} g) \right) \quad (5.1)$$

($v \neq 0$ ist ein Proportionalitätsfaktor) geht nach der Umeichung

$$\psi(x) \mapsto e^{-i\alpha(x)} \cdot \psi(x) \quad (5.2)$$

in

$$\tilde{A}_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{v} (\bar{\psi}\psi)(x) \cdot \partial_\mu \alpha(x) \quad (5.3)$$

über. Der inhomogene Anteil wird zu einer c-Zahl, wenn man die Zwangsbedingung

$$\bar{\psi}\psi - v = 0 \quad (5.4)$$

verlangt. Dann liefert die minimale Substitution

$$\partial_\mu \mapsto D_\mu = \partial_\mu + i A_\mu \quad (5.5)$$

tatsächlich eine $U(1)$ -kovariante Ableitung D_μ .

Die fundamentale Spinortheorie sei die Modell-Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial - A - m)\psi \quad (5.6)$$

D. h.: ein kinetischer Term des Vektorpotentials A^μ (Maxwell-Lagrangedichte) wird zumindest in der klassischen Lagrangedichte noch nicht gestattet. Sie wird ergänzt durch den Ausdruck (1) für das Hilfsfeld A^μ sowie die Operatorbedingung (4) (siehe [3]).

Letztere kann auch in der Form ausgedrückt werden, daß sich alle Green-Funktionen, an denen $\bar{\psi}\psi$ beteiligt ist, durch die Substitution $\bar{\psi}\psi \mapsto v$ vereinfachen lassen. Eine Anwendung auf die freie 2-Punkt-Funktion ergibt z. B.:

$$\langle 0 | \bar{\psi}(x)\psi(x) | 0 \rangle = - \int \frac{d^4 p}{N} \text{tr} \left(\frac{i}{\not{p} - m} \right) |_{PV} = v \quad (N = (2\pi)^4) \quad (5.7)$$

wobei $|_{PV}$ auf die Durchführung der Pauli-Yillars-Regularisierung hinweist:

$$\frac{i}{\not{p} - m} \mapsto \frac{i}{\not{p} - m} + \sum_{\nu=1}^n \frac{i}{\not{p} - \Lambda_\nu} \cdot \varrho_\nu \quad (5.8)$$

Die PV-Parameter ϱ_ν und die Regulatormassen Λ_ν lösen das System (B.6), welches aus n unabhängigen, in ϱ_ν linearen Gleichungen besteht (PV-Bedingungen). Handelt es sich alleine um das 1-Loop-Integral in (7), dann reichen bereits PV-Bedingungen für das erste und dritte Massenmoment aus, um seine Konvergenz zu erreichen. Der tatsächlich erforderliche Rang n hängt unter Umständen noch von der parallelen Regularisierung aller übrigen Fermion-1-Schleifen-Diagramme ab, die innerhalb der Theorie (6) (unter Einbeziehung von (1), (4)) auftreten. Die Auswertung von (7) wird daher zunächst verschoben; sie führt jedenfalls auf einen Zusammenhang zwischen dem Vakuum Erwartungswert v , der Fermionmasse m und dem Cutoff Λ im Grenzfall asymptotisch gleicher Regulatormassen $\Lambda_i \rightarrow \Lambda$ (vgl. Anhang B).

Die Zwangsbedingungen (1), (4) können in die Lagrangedichte (6) aufgenommen werden, indem man sowohl ein vektorielles als auch ein skalares Lagrangemultiplikator-Feld λ_μ bzw. λ bereitstellt (in Anlehnung an [3]):

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial - A - m)\psi + \lambda^\mu (v A_\mu - \bar{\psi} i \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi) + \lambda \cdot (\bar{\psi}\psi - v) \quad (5.9)$$

Die beiden bilinearen Spinorprodukte aus den Zwangsbedingungen können noch normal geordnet werden. Benutzt man dazu die PV-Regularisierung, dann ändert sich in (9) lediglich der Wert der c -Zahl v . Offenbar gestattet die Zwangsbedingung für $\bar{\psi}\psi$, den Massenterm des Diracfeldes sofort zu eliminieren. Andererseits entsteht ein solcher Term, wenn der Multiplikator λ um einen konstanten Betrag verschoben wird.

Die Variationen der Wirkung nach den Multiplikatoren führen genau zu den beiden Zwangsbedingungen. Offenbar ist es möglich, das Hilfsfeld A^μ vollständig zu eliminieren; dann entsteht anstelle von (9) eine nichtlineare Spinortheorie $\mathcal{L}_\psi$ mit

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\vec{\partial} - m)\psi - \frac{\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \cdot \bar{\psi}i\vec{\partial}_\mu\psi}{v} + \lambda \cdot (\bar{\psi}\psi - v) \quad (5.10)$$

die noch das Operatorprodukt $\bar{\psi}\psi$ vorschreibt. Die Selbstwechselwirkung ist von 4. Ordnung in ψ und linear im partiellen Ableitungsoperator ∂_μ .

Man sieht rasch, daß (10) invariant bezüglich der lokalen Phasentransformation (2) bleibt. Die begleitende Transformation der Hilfs-Konnektion

$$A_\mu \mapsto A_\mu + \alpha_{,\mu} \quad (5.11)$$

verursacht dennoch formal eine Variation der bilinearisierten Lagrangedichte (9):

$$\delta\mathcal{L} = -\alpha^{,\mu} \cdot \lambda_\mu (\bar{\psi}\psi - v) \quad (5.12)$$

Sie fällt proportional zur Zwangsbedingung (4) aus und trägt demnach nicht bei, sobald man auf dieser Einschränkung des Diracfeldes ψ besteht.

Es ist jedoch gar nicht notwendig, auf (4) zurückzugreifen; die $U(1)$ -Eichinvarianz von (10) kann auch durch das inhomogene Transformationsgesetz

$$\lambda \mapsto \lambda + \lambda_\mu \cdot \alpha^{,\mu} \quad (5.13)$$

des Multiplikatorfeldes verwirklicht werden.

5.2. DIE EFFEKTIVE WIRKUNG DER BOSONISCHEN FELDER

5.2.1. GRASSMANN-FUNKTIONALINTEGRATION;

EICHINVARIANZ DER EFFEKTIVEN WIRKUNG

Wir betrachten jetzt das erzeugende Funktional $Z(\varphi, \bar{\varphi})$ der Green-Funktionen des Feldes ψ zu (9). Nach (3.18) erhält man diese als Koeffizienten einer Taylorentwicklung nach den (antiver-tauschenden) Quellen $\varphi, \bar{\varphi}$ von $\bar{\psi}$ bzw. ψ des (normierten) Funktionalintegrals

$$Z(\varphi, \bar{\varphi}) = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \int \mathcal{D}\psi \int \mathcal{D}A_\mu \int \mathcal{D}\lambda_\mu \int \mathcal{D}\lambda \cdot e^{i \int d^4x \{ \bar{\psi}(i\vec{\partial} - m)\psi + \lambda^\mu \cdot (A_\mu v - \bar{\psi}i\vec{\partial}_\mu\psi) + \lambda(\bar{\psi}\psi - v) + \bar{\varphi}\psi + \bar{\psi}\varphi \}} \quad (5.14)$$

$$Z(0, 0) = 1$$

Die Pfadintegrationen über die Multiplikatorfelder λ_μ, λ führen auf δ -Distributionsfunktionale mit unseren Zwangsbedingungen in den Argumenten.

Wegen der in $\psi, \bar{\psi}$ bilinearen Gestalt des Exponenten ist die Grassmann-Integration $\int \mathcal{D}\bar{\psi} \int \mathcal{D}\psi$ in (14) geschlossen ausführbar. Zu diesem Zweck beginnt man, die Wirkung zusammen mit den

Quelltermen quadratisch zu ergänzen, und führt darauf eine passende Translation der Spinorfelder $\psi, \bar{\psi}$ aus, was

$$Z(\varphi, \bar{\varphi}) = \int \mathcal{D}A_\mu \int \mathcal{D}\lambda_\nu \int \mathcal{D}\lambda \cdot e^{\left\{ \int d^4x (\lambda^\mu A_\mu \cdot v - \lambda v + \bar{\varphi} \frac{1}{i\cancel{\partial} - \cancel{A} - m - \lambda_\mu i\overleftrightarrow{\partial}^\mu + \lambda} \varphi) - i \text{Tr} \ln(i\cancel{\partial} - \cancel{A} - m - \lambda_\mu i\overleftrightarrow{\partial}^\mu + \lambda) \right\}} \quad (5.15)$$

liefert (vgl. (3.14), (3.30)). Verzichtet man darauf, äußere Spinorlinien einzubeziehen, dann sind einfach die Spinorquellen $\varphi, \bar{\varphi}$ gleich Null zu setzen. Dem rein bosonischen Funktionalintegral über A^μ und die beiden Multiplikatoren kann in diesem Fall die effektive Wirkung

$$S_{eff}(A^\mu, \lambda_\nu, \lambda) := \int d^4x \mathcal{L}_{eff} = \int d^4x (\lambda_\mu A^\mu \cdot v - \lambda v) - i \text{Tr} \ln(i\cancel{\partial} - \cancel{A} - m + \lambda - \lambda_\mu i\overleftrightarrow{\partial}^\mu) \quad (5.16)$$

entnommen werden.^[18] Sie enthält noch zwei Kontaktterme aus der ursprünglichen klassischen Lagrangedichte (9); das $\text{Tr} \ln$ -Funktional kann entwickelt werden, so daß die effektiven Wechselwirkungen zwischen $A^\mu, \lambda, \lambda_\nu$ bis zu beliebig hoher Ordnung als Reihenglieder erscheinen. Sie gehen aus 1-Fermion-Schleifendiagrammen der Spinor-Lagrangedichte (9) hervor, an deren Vertices die Linien der äußeren bosonischen Hilfsfelder einlaufen. Eine eingehende Besprechung von $\mathcal{L}_{eff}$ findet in den nachfolgenden Abschnitten statt.

Wir greifen erneut die Frage nach der $U(1)$ -Eichinvarianz auf. Mit den in (11), (13) angegebenen Variationen

$$\begin{cases} \delta A_\mu &= \alpha_{,\mu} \\ \delta \lambda &= \lambda_\mu \alpha^{,\mu} \end{cases}$$

bleibt die effektive Lagrangedichte (16) formal invariant; genauer formuliert: die Baumgraphen-Terme und das $\text{Tr} \ln$ -Funktional sind jeweils für sich invariant:

$$(i\cancel{\partial} - \cancel{A} - m + \lambda - \lambda_\mu i\overleftrightarrow{\partial}^\mu) \mapsto e^{-i\alpha(x)} (i\cancel{\partial} - \cancel{A} - m + \lambda - \lambda_\mu i\overleftrightarrow{\partial}^\mu) e^{i\alpha(x)} \quad (5.17)$$

Die funktionale Identität (vgl. (3.30))

$$\ln \text{Det} M = \text{Tr} \ln M$$

in Verbindung mit der Multiplikationseigenschaft der Determinante bestätigt dann unsere Behauptung. Eine strengere Behandlung der $U(1)$ -Umeichung in der effektiven Wirkung $\mathcal{S}_{eff}$ führen wir im Anhang E.1 vor.

[18] Die Spurbildung findet sowohl im Konfigurationsraum wie im Diracmatrizen-Raum statt. Der beidseitige Differentialoperator $i \cdot \overleftrightarrow{\partial}_\mu$ operiert nicht auf dem Multiplikatorfeld $\lambda_\mu(x)$.

Die Translation (13) von λ im Falle lokaler Phasentransformationen bedeutet wegen der Invarianz des Maßes $\mathcal{D}\lambda$ offenbar, daß die aus erneuter Funktionalintegration gewonnene effektive Wirkung

$$\tilde{\mathcal{S}}_{eff}(A_\mu, \lambda_\nu) = -i \ln \left(\int \mathcal{D}\lambda e^{i\mathcal{S}_{eff}(A^\mu, \lambda_\nu, \lambda)} \right) \quad (5.18)$$

schon unter Umeichungen von A^μ alleine invariant ist. Die Gründe ähneln denen, die in der Diskussion der klassischen Eichinvarianz bei (12) genannt wurden. Denn $\int \mathcal{D}\lambda \dots$ entspricht in der Spinortheorie der Ausnutzung der Zwangsbedingung $\bar{\psi}\psi = v$.

5.2.2. LORENTZINVARIANZ UND EFFEKTIVE WECHSELWIRKUNGEN ALS 1-LOOP-AMPLITUDEN

Die unerledigten Funktionalintegrale in (15) sind geschlossen nicht durchführbar, da z. B. die im Exponenten vertretene effektive Wirkung nicht mit den in $A^\mu, \lambda_\nu, \lambda$ quadratischen Gliedern abbricht. Um einen Einblick in die effektive, durch Quantenfluktuationen entstandene Dynamik zu bekommen, ist eine Taylorentwicklung von $\mathcal{S}_{eff}$ um eine stationäre bosonische Feldkonfiguration "" nützlich. Dabei sind in den Feldamplituden lineare Beiträge zu $\mathcal{S}_{eff}$ nicht vorhanden. Teilweise erhalten die Entwicklungskoeffizienten erst nach PV-Regularisierung des Spurfunktionalen einen wohldefinierten Sinn.

Die Stationaritätsbedingungen an der Stelle σ folgen aus (16) (PV verlangt die Pauli-Villars-Regularisierung):

$$0 = \frac{\delta \mathcal{S}_{eff}}{\delta A_\mu(x)} = \lambda^\mu(x) \cdot v + i \text{Tr}_D \langle x | \frac{1}{i\partial - \not{A} - m + \lambda - \lambda_\alpha i\overline{\partial}^\alpha} \gamma^\mu | x \rangle_{PV} \quad (5.19a)$$

$$0 = \frac{\delta \mathcal{S}_{eff}}{\delta \lambda_\mu(x)} = A^\mu(x) \cdot v + i \text{Tr}_D \langle x | \frac{1}{i\partial - \not{A} - m + \lambda - \lambda_\alpha i\overline{\partial}^\alpha} i\overline{\partial}^\mu | x \rangle_{PV} \quad (5.19b)$$

$$0 = \frac{\delta \mathcal{S}_{eff}}{\delta \lambda(x)} = -v - i \text{Tr}_D \langle x | \frac{1}{i\partial - \not{A} - m + \lambda - \lambda_\alpha i\overline{\partial}^\alpha} \cdot 1 | x \rangle_{PV} \quad (5.19c)$$

(tr_D : Spurbildung betrifft hier nur den Dirac-Raum).

$|y\rangle$ sind normierte Eigenzustände des Raum-Zeit-Operators x^μ ; die Normierung geht aus dem Skalarprodukt $\langle x | 1 | y \rangle = \delta^{(4)}(x - y)$ hervor.

Hierfür gibt es eine Lorentz-invariante Lösung σ der Gestalt

$$\lambda_\mu(x) = 0, \quad A_\mu(x) = 0, \quad \lambda(x) = 0 \quad (5.20)$$

wenn die regularisierten 1-Loop Tadpole-Diagramme der vorgelegten Spinortheorie den Beziehungen

$$0 = - \int \frac{d^4 p}{N} \text{tr}_D \left(\frac{1}{\not{p} - m} \cdot \gamma^\mu \right)_{PV} \quad (5.21a)$$

$$0 = - \int \frac{d^4 p}{N} \text{tr}_D \left(\frac{1}{\not{p} - m} \cdot p^\mu \right)_{PV} \quad (5.21b)$$

$$0 = + \int \frac{d^4 p}{N} \text{tr}_D \left(\frac{1}{\not{p} - m} \cdot 1 \right)_{PV} - iv \quad (N := (2\pi)^4) \quad (5.21c)$$

genügen. Die Vorschrift, die Schleifenimpulsintegrale symmetrisch auszuführen (d. h. nach dem Übergang zu einer euklidischen Metrik die Reihenfolge $\int_0^\infty p^3 dp \int d\Omega^{(4)}$ vorzuschreiben^[19]), bewirkt trivial richtige Bedingungen (a, b). Sie ist der PV-Regularisierung durchaus vergleichbar, indem sie ein ansonsten divergentes Loop-Integral endlich macht. Wir verlassen uns in diesem Kapitel jedoch ausschließlich auf die PV-Behandlung der divergenten 1-Schleifen-Amplituden. Eine Entwicklung der Integranden von (a, b) nach Potenzen von $(\frac{m^2}{p^2})$ (ultravioletter Grenzfall) zeigt uns, daß Spektralbedingungen à la (B.6) für die Exponentenmenge $\{0, 1, 2, 3\}$ hinreichend sind. Damit tritt in (21c) die Regularisierung ein; es handelt sich dabei um unsere frühere Gleichung (7), die eine Voraussetzung der Konnektionseigenschaft des Verbundfeldes A^μ darstellte. Später wird sich ergeben, daß (21c) wegen der darin enthaltenen Verknüpfung zwischen einer 1-Loop-Amplitude und der c-Zahl v zwar die Form der effektiven Wirkung beeinflusst, jedoch nicht die Ursache der $U(1)$ -Eichinvarianz von S_{eff} ist. Die Festsetzung $\lambda(x) = 0$ in (20) übersieht nicht die Möglichkeit $\lambda(x) = l = \text{const.} \neq 0$, weil diese durch eine Verschiebung $m \mapsto (m + l)$ der Fermionmasse rückgängig gemacht wird.

Die Taylorentwicklung von S_{eff} um die stationäre Konfiguration (20) enthält also keinen in den bosonischen Feldern linearen Term. Addiert man zu (16) formal die Konstante $i \cdot \text{Tr} \ln(i\partial - m)$ — die effektive Feldtheorie bleibt dieselbe — dann kann auf die Reihenentwicklung des natürlichen Logarithmus um den Einheitsoperator zurückgegriffen werden ($\ln(1 - x) = -\sum_{\nu=1}^{\infty} (\frac{x^\nu}{\nu})$). Wir erhalten S_{eff} in Form der Taylorreihe

$$S_{eff}(A^\mu, \lambda_\nu, \lambda) = \int d^4x (A^\mu \lambda_\mu) \cdot v + i \cdot \sum_{s=2}^{\infty} \frac{1}{s} \text{tr} \left(\frac{1}{(i\partial - m)} \{ A + \lambda_\mu i\vec{\partial}^\mu - \lambda \} \right)^s \quad (5.22)$$

In der Impulsraumbasis $|p\rangle$ ($(p = (p^0, \vec{p}); \langle q | 1 | p \rangle = \delta^{(4)}(q - p)$); die Zerlegung der Einheit lautet $1 = \int d^4p |p\rangle \langle p|$) treten während der Spurbildung in (22) folgende Matrixelemente auf:

$$\begin{aligned} \langle p | A_\mu | q \rangle &= \frac{1}{N} \int d^4x e^{i(p-q)x} A_\mu(x) =: \frac{A_\mu(p-q)}{N} \\ &\quad (\text{analog für das Multiplikatorfeld } \lambda \text{ bzw. } \lambda_\beta) \\ \langle p | i\vec{\partial}_\mu | q \rangle &= \frac{1}{2} (p+q)_\mu \delta^{(4)}(p-q) = p_\mu \delta^{(4)}(p-q) \\ \langle p | i\partial | q \rangle &= \not{p} \delta^{(4)}(p-q) \end{aligned} \quad (5.23)$$

Die Fourier-transformierten Felder werden nur anhand ihres Arguments unterschieden. Dann kann

[19] $\Omega^{(4)}$ bezeichnet den 4-dimensionalen Raumwinkel.

die effektive Wirkung als rein algebraischer Ausdruck wiedergegeben werden:

$$\begin{aligned}
S_{eff}(A^\mu, \lambda_\nu, \lambda) &= \int \frac{d^4 p d^4 q}{N} v \cdot \lambda_\mu(p) A^\mu(q) \delta^{(4)}(p - q) \\
&+ i \sum_{s=2}^{\infty} \frac{1}{s} \underbrace{\int \cdots \int}_{s\text{-fach}} \frac{\prod_{i=1}^s d^4 p_{(i)}}{N^{s-1}} \int \frac{d^4 l}{N} \text{tr}_D \prod_{\varrho=1}^s \frac{1}{(l + \sum_{\omega=1}^{\varrho} \not{p}_{(\omega)} - m)} \\
&\cdot \left\{ A(p_{(\varrho)}) + \lambda_\mu(p_{(\varrho)}) \cdot (l + \sum_{\sigma=1}^{\varrho-1} p_{(\sigma)} + \frac{p_{(\varrho)}}{2})^\mu - \lambda(p_{(\varrho)}) \right\} \\
&\cdot \delta^{(4)}(\sum_{i=1}^s p_{(i)})
\end{aligned} \tag{5.24}$$

Es lohnt sich, den Zusammenhang mit den amputierten Feynman-Diagrammen der Lagrangedichte (9) herzustellen, welche längs einer Fermionschleife a Vertizes mit Kopplung an das Hilfsfeld A^μ , b Vertizes mit einer Ableitungskopplung an λ_ν sowie c Vertizes mit dem äußeren Feld λ besitzen. Diese (eventuell nach PV regularisierte) 1-Schleifen-Amplitude hat insgesamt $(a + b + c)$ Vertizes; wir bezeichnen sie mit

$$\omega_{\mu_1, \dots, \mu_a; v_1, \dots, v_b}^{(\tau_{(a,b,c)})}(p_1, \dots, p_a; q_1, \dots, q_b; r_1, \dots, r_c) \tag{5.25}$$

Sämtliche Impulsvariablen werden als einlaufend angesehen; $p_i (1 \leq i \leq a)$ sind den Vertizes mit A_μ , zugeordnet, $q_i (1 \leq i \leq b)$ gehören der Reihe nach zu den Vertizes mit einer Kopplung an λ_ν ; schließlich werden die Impulse $r_i (1 \leq i \leq c)$ den skalaren λ -Vertizes zugewiesen. Der in Klammern gesetzte Index $\tau_{(a,b,c)}$ gibt eindeutig Auskunft über die Topologie des Diagramms, welche durch die Reihenfolge der Vertex-Sorten $A^\mu, \lambda_\nu, \lambda$ längs der Spinorschleife festgelegt ist (bis auf zyklische Permutation aller $(a + b + c)$ Vertizes). $\tau_{(a,b,c)}$ ist gleichbedeutend einer Permutation von

$$\left(\underbrace{A_\alpha, \dots, A_\alpha}_{a\text{-fach}}, \underbrace{\lambda_\beta, \dots, \lambda_\beta}_{b\text{-fach}}, \underbrace{\lambda, \dots, \lambda}_{c\text{-fach}} \right)$$

Damit kann (25) jetzt im Einzelfall bei Beachtung der Feynman-Regeln berechnet werden (wegen der Fermionschleife erscheint ein negatives Vorzeichen; ein Symmetriefaktor ist nicht beteiligt).

Wir können daher anstelle von (24) auch die äquivalente Darstellung

$$\begin{aligned}
iS_{eff}(A^\mu, \lambda_\nu, \lambda) &= \int \frac{dp dq}{N} (iv) \cdot \lambda_\mu(p) A^\mu(q) \delta^{(4)}(p - q) \\
&+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{\substack{a,b,c \in \mathbb{N}_0 \\ a+b+c=n}} \sum_{\tau_{(a,b,c)}} \kappa_{\tau_{(a,b,c)}} \\
&\cdot \prod_{i=1}^a \left(\int A^{\mu_i}(p_{(i)}) \frac{d^4 p_{(i)}}{N} \right) \prod_{j=1}^b \left(\int \lambda^{\nu_j}(q_{(j)}) \frac{d^4 q_{(j)}}{N} \right) \cdot \prod_{k=1}^c \left(\int \frac{\lambda(r_{(k)}) d^4 r_{(k)}}{N} \right) \\
&\cdot N \cdot \delta^{(4)} \left(\sum_{i=1}^a p_{(i)} + \sum_{j=1}^b q_{(j)} + \sum_{k=1}^c r_{(k)} \right) \\
&\cdot \omega_{\mu_1, \dots, \mu_a; v_1, \dots, v_b}^{(\tau_{(a,b,c)})}(p_1, \dots, p_a; q_1, \dots, q_b; r_1, \dots, r_c)
\end{aligned} \tag{5.26}$$

wählen. Der kombinatorische Faktor $\kappa_{\tau(a,b,c)} \in \mathbb{N}$ gibt die (minimale) Periodenlänge der die Topologie festlegenden Permutation $\tau_{(a,b,c)}$ an; $(\frac{\kappa}{n})$ ist daher das Reziproke der Periodenzahl innerhalb der $\tau_{(\dots)}$ -Permutation. Entnimmt man die Greenfunktionen bezüglich der bosonischen Hintergrundfelder $A^\mu, \lambda_\nu, \lambda$ aus (26), dann wird dieser Vorfaktor jedesmal genau aufgehoben, weil infolge der Periodizität entlang der Schleife $(\frac{n}{\kappa})$ ununterscheidbare Kontraktionen zu den äußeren Vertizes bestehen. Diese Erläuterungen sollten ausreichen, den Übergang von (24) nach (26) zu verstehen.

Der oberflächliche Divergenzgrad eines Diagramms (25) ist eine Funktion der Anzahlen a, b, c äußerer Vertizes vom Typ $A^\mu, \lambda_\nu, \lambda$:

$$D(a, b, c) = 4 - (a + b + c) + b = 4 - a - c \leq 4 \quad (5.27)$$

Die Unabhängigkeit von b ist leicht einzusehen: aufgrund der Ableitungskopplung in $\mathcal{L}_{int} = -\bar{\psi}(i\vec{\sigma}_\mu)\psi \cdot \lambda^\mu$ enthält das Feynman-Diagramm einen Beitrag mit b Schleifenimpulsfaktoren l^μ im Zähler.

Eine unendliche Zahl von 1-Schleifen-Diagrammen weist in der von Amati et al. vorgelegten Theorie also einen nichtnegativen Divergenzgrad D auf, weshalb alle Versuche, durch Gegenterme eine Renormierung zu erreichen, scheitern müssen. In unserer Untersuchung nehmen wir Regulatormassen Λ_i , die im asymptotischen Grenzfall gegen den gemeinsamen Cutoff Λ streben (Näheres im Anhang B). Dieser möge zwar um Größenordnungen die Massenwerte aller bekannten (Elementar)-Teilchen übertreffen, soll aber trotzdem beschränkt bleiben. Aus (B.5) und (B.6) geht hervor, daß insgesamt fünf PV-Bedingungen hinreichen (die Exponentenmenge ist $\{0, 1, 2, 3, 4\}$), um in allen Fällen konvergente regularisierte 1-Schleifen-Diagramme zu gewinnen. Ihre Notwendigkeit erweist sich einerseits bei der Betrachtung von Tadpole-Graphen, welche eingangs in der Analyse der Stationaritätsbedingungen vorkamen, und andererseits anhand der bilinearen effektiven Wechselwirkungen, denen wir uns gleich zuwenden wollen.

5.2.3. SÄMTLICHE DIAGRAMME MIT BIS ZU ZWEI ÄUSSEREN FELDERN

Für den Dirac-Propagator im Impulsraum wird die Bezeichnung

$$\mathcal{D}(p) = \left(\frac{i}{\not{p} - m} \right) \quad (5.28)$$

verwendet. Außerdem nehmen wir die Ersetzung $N := (2\pi)^4$ vor.

Die gesuchten Amplituden sind der Reihe nach:

$$\begin{aligned} \omega_{\mu\nu}^{(A^\mu A^\nu)}(p, -p; ;) = \\ - \int \frac{d^4 l}{N} \text{tr}_D(\mathcal{D}(l + \frac{1}{2}p; m)(-i\gamma_\mu)\mathcal{D}(l - \frac{1}{2}p; m)(-i\gamma_\nu))|_{PV} \end{aligned} \quad (5.29a)$$

$$\begin{aligned} \omega_{\mu\nu}^{(A^\mu \lambda_\nu)}(p; -p;) = \\ - \int \frac{d^4 l}{N} \text{tr}_D(\mathcal{D}(l + \frac{1}{2}p; m)(-i\gamma_\mu)\mathcal{D}(l - \frac{1}{2}p; m)(-il_\nu))|_{PV} \end{aligned} \quad (5.29b)$$

$$\omega_{\mu}^{(A_{\mu}\lambda)}(p; -p) = - \int \frac{d^4 l}{N} \text{tr}_D(\mathcal{D}(l + \frac{1}{2}p; m)(-i\gamma_{\mu})\mathcal{D}(l - \frac{1}{2}p; m)i)|_{PV} \quad (5.29c)$$

$$\begin{aligned} \omega_{\mu\nu}^{(\lambda_{\mu}\lambda_{\nu})}(; p, -p) = \\ - \int \frac{d^4 l}{N} \text{tr}_D(\mathcal{D}(l + \frac{1}{2}p; m)(-il_{\mu})\mathcal{D}(l - \frac{1}{2}p; m)(-il_{\nu}))|_{PV} \end{aligned} \quad (5.29d)$$

$$\omega_{\mu}^{(\lambda_{\mu}\lambda)}(; p, -p) = - \int \frac{d^4 l}{N} \text{tr}_D(\mathcal{D}(l + \frac{1}{2}p; m)(-il_{\mu})\mathcal{D}(l - \frac{1}{2}p; m)i)|_{PV} \quad (5.29e)$$

$$\omega^{(\lambda\lambda)}(; ; p, -p) = - \int \frac{d^4 l}{N} \text{tr}_D(\mathcal{D}(l + \frac{1}{2}p; m) \cdot i\mathcal{D}(l - \frac{1}{2}p; m) \cdot i)|_{PV} \quad (5.29f)$$

Die Impulsargumente werden fortan auf die Angabe von p alleine verkürzt; Verwechslungen sind nicht möglich. Die Lorentztensor-Struktur der einzelnen Amplituden wurde schon in [3] ermittelt. Eine Anwendung des verallgemeinerten Furry-Theorems (siehe Anhang C.1) zeigt, daß sowohl die $(A^{\mu} - \lambda)$ - als auch die $(\lambda_{\mu} - \lambda)$ -Mischamplitude nicht an der effektiven Wirkung teilnehmen.

Bevor die nichttrivialen Integrale aus (29) dargestellt werden, ist es empfehlenswert, einige darin wiederholt vertretene Strukturterme abzukürzen:

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu} &= \eta^{\mu\nu} - p^{\mu}p^{\nu}/p^2 \\ R_n(e) &= \sum_{i=1}^n e_i(\Lambda_i)^e \ln \left(\frac{(\Lambda_i)^2}{m^2} \right) ; \quad w = \sqrt{-1 + \frac{4m^2}{p^2}} \quad (p^2 \leq 4m^2) \end{aligned} \quad (5.30)$$

Damit gelangt man zu folgenden Ergebnissen:

$$\begin{aligned} \omega_{\mu\nu}^{(A_{\mu}A_{\nu})}(p) &= i\Pi_{\mu\nu} \cdot p^2 \frac{1}{12\pi^2} \{ R_5(0) \\ &\quad + (w^2 + 3) \cdot (w \operatorname{arccot} w - 1) + \frac{1}{3} \} \end{aligned} \quad (5.31a)$$

$$\begin{aligned} \omega_{\mu\nu}^{(A_{\mu}\lambda_{\nu})}(p) &= \frac{i}{4\pi^2} \left\{ \eta_{\mu\nu} R_5(3) \right. \\ &\quad \left. - \Pi_{\mu\nu} \cdot p^2 \frac{1}{6} \{ R_5(1) - 2m \left(w^2 \cdot (w \operatorname{arccot} w - 1) + \frac{1}{3} \right) \} \right\} \end{aligned} \quad (5.31b)$$

$$\begin{aligned} \omega_{\mu\nu}^{(\lambda_{\mu}\lambda_{\nu})}(p) &= \frac{i}{16\pi^2} \left\{ \eta_{\mu\nu} \cdot 5R_5(4) - \Pi_{\mu\nu} \cdot p^2 \frac{1}{3} \left\{ 5R_5(2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - p^2 \left(\frac{1}{2}R_5(0) + (w^4 \cdot (w \operatorname{arccot} w - 1) + \frac{1}{3}w^2 - \frac{1}{5}) \right) \right\} \right\} \end{aligned} \quad (5.31c)$$

$$\begin{aligned} \omega^{(\lambda\lambda)}(p) &= \frac{i}{4\pi^2} \left\{ 3R_5(2) \right. \\ &\quad \left. + p^2 \left\{ -\frac{1}{2}R_5(0) + w^2 \cdot (w \operatorname{arccot} w - 1) + \frac{1}{3} \right\} \right\} \end{aligned} \quad (5.31d)$$

$R_5(4)$ entstand aus dem Integral

$$- \int_0^{\infty} \frac{dx \cdot m^4}{(x + m^2)}|_{PV}$$

worin $x = \bar{l}^2$ das Betragsquadrat der radialen euklidischen Schleifenimpulsvariable $\bar{l}$ bedeutet. Der Radikand von w hat einen negativen Wert, falls $p^2 < 0$. Die Wurzelfunktion in p^2 kann analytisch

fortgesetzt werden, wobei die Substitution $m^2 \mapsto (m^2 - i\epsilon)$ (ϵ infinitesimal und positiv) die Lage bezüglich der Schnittpunkte korrekt wiedergibt:

$$w \mapsto i\sqrt{-w^2} \Rightarrow w \operatorname{arccot} w \mapsto \sqrt{-w^2} \operatorname{arccoth}(\sqrt{-w^2})$$

Bei $|w| > 1$ (besteht, falls $p^2 \leq 2m^2$) konvergiert die Reihenentwicklung

$$(w \operatorname{arccot} w - 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-w^{-2})^n}{(2n+1)} \quad (5.32)$$

Die von den Spektralsummen $R_5(\epsilon)$ unabhängigen Terme in den Amplituden (31) sind daher analytische Funktionen in $\frac{1}{w^2} = p^2/(4m^2 - p^2)$; bei kleinen Impulsquadraten $|p^2| \ll m^2$ darf man sie gegenüber den Konstanten $R_5(\epsilon)$ vernachlässigen. Streng betrachtet sollten die eben genannten Terme auch in Form einer gewichteten Spektralsumme eingehen; eine Entwicklung nach Potenzen von $(\frac{p^2}{m^2})$ zeigt jedoch, daß in jedem Fall nur negative Momente der Regulatormassen auftreten. Deshalb konnten wir (B.15) zur Vereinfachung heranziehen, denn $m \ll \Lambda$ wurde stets angenommen.

Die in (31) vorgestellten effektiven Wechselwirkungen sind durchweg nichtlokal (beliebig hohe partielle Ableitungen treten nach einer Fourier-Transformation auf). Wenn die bosonischen Felder $A^\mu, \lambda_\nu, \lambda$ sich nur über Distanzen $\gg m^{-1}$ merklich ändern, dann kann man Beiträge höherer Ordnung in $(\frac{p^2}{m^2})$ zu den entsprechenden Amplituden unterdrücken. Es ist sicher schon bemerkt worden, daß (31a) genau die transversale Greenfunktion der QED-Vakuumpolarisation (in 1-Schleifen-Näherung) darstellt, deren Regularisierung sich allerdings auf fünf PV-Bedingungen stützt, während in der QED bereits zwei genügen. Dieser Unterschied hängt eng mit der Ableitungskopplung in der Lagrangedichte (9) von Amati et al zusammen.

Die gewichteten Spektralsummen $R_5(\epsilon)$ (siehe (30)) übernehmen wir aus (B.18), wo allein der führende Term im asymptotischen Limes $(\frac{\Lambda}{m}) \rightarrow \infty$ wiedergegeben ist:

$$\begin{aligned} R_5(0) &= -\ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) + \frac{25}{6}; & R_5(1) &= \frac{1}{2}\Lambda; & R_5(3) &= \frac{1}{6}\Lambda^3 \\ R_5(2) &= -\frac{1}{6}\Lambda^2; & R_5(4) &= -\frac{1}{2}\Lambda^4 \end{aligned} \quad (5.33)$$

Die Zwischenschritte, welche von (29) zu (31) führen, sind für das Beispiel der bilinearen $(\lambda_\mu - \lambda_\nu)$ -1-Schleifenwechselwirkung (29d) in Anhang D.3 erläutert.

Da die PV-Regulatoren jetzt feststehen, kann die Auswertung der Stationaritätsbedingung (21c) nachgeholt werden; die "Gap-Gleichung" lautet:

$$iv = -\frac{i}{4\pi^2} R_5(3) = -\frac{i}{4\pi^2} \left(\frac{\Lambda^3}{6}\right) \quad (5.34)$$

Die Fermionmasse m geht in die Gap-Gleichung (34) durchaus ein; der nächstführende Beitrag von $R_5(3)$ im asymptotischen Limes $(\frac{\Lambda}{m}) \gg 1$ ist zu berücksichtigen:

$$R_5(3) = \frac{1}{6}\Lambda^3 + R'_5(3) + \Lambda^3 \cdot \left(O\left(\frac{m^2}{\Lambda^2}\right) + \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) \cdot O\left(\frac{m^2}{\Lambda^2}\right)\right) \quad (5.35a)$$

$$R'_5(3) = -m \cdot \Lambda^2 \Rightarrow v \simeq -\frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{\Lambda^3}{6} \cdot \left(1 - 6\frac{m}{\Lambda}\right) \quad (5.35b)$$

(vgl. mit Anhang (B.21)).

Meine Resultate unterscheiden sich in zwei Punkten von [3] (dort S. 409). Amati et al. geben den kinetischen Term in (31b) sowie (34) jeweils um einen Faktor $(\frac{m}{\Lambda})$ kleiner an und dementsprechend erhalten sie auch eine Proportionalitätsbeziehung $m \sim (v/\Lambda^2)$ zwischen der Fermionmasse und dem Vakuumerwartungswert v (siehe dazu (7)). Wir können zeigen, daß dabei eine andere Form der PV-Regularisierung benutzt wurde, gegen die grundsätzlich kein Einwand erhoben werden kann. Sie besitzt sogar — verglichen mit dem von mir gewählten Verfahren — den Vorteil, die Regularisierung solcher Diagramme zu entkoppeln, welche nicht durch die Forderung nach Eichinvarianz miteinander verknüpft sind.

Um diesen Sachverhalt näher zu verstehen, greifen wir auf die Kennzeichnung der induzierten 1-Schleifen-Wechselwirkungen $W(a, b, c)$ durch die Anzahlen a, b, c der beteiligten Felder des Typs $A^\mu, \lambda_\nu, \lambda$ zurück (vgl. Abschnitt 5.2.2). In gleicher Weise beschreiben wir die nach (11), (13) gewonnene $U(1)$ -Variation von W als eine Summe von Monomen $V_i(a', b', c')$; darin beziehen sich a', b', c' in derselben Reihenfolge wie oben auf die Anzahlen gleichartiger Feldvariablen. Es gilt also:

$$\delta W(a, b, c) = V_1(a-1, b, c) + V_2(a, b+1, c-1) \quad (5.36)$$

$$V_i(u, v, w) \equiv 0, \text{ falls } u < 0 \vee v < 0 \vee w < 0$$

Umgekehrt entsteht eine Variation $V_i(a, b, c)$ entweder aus der Wechselwirkung $W(a+1, b, c)$ oder aber durch Umeichung in $W(a, b-1, c+1)$ (sobald $b \geq 1$ zutrifft).

Es liegt auf der Hand, daß die eichinvariante Regularisierung (etwa durch ein PV-Verfahren) für die Diagrammklassen $K_D \subset \{W(a, b, c); a, b, c \geq 0\}$ mit einem festen Wert $(a+c) = 4-D(a, b, c)$ unabhängig bestimmt werden kann.

Da innerhalb von K_4 (nur λ_μ -Feld-Vertizes sind möglich) die Eichinvarianz nicht auf dem Spiel steht, ist eine beliebige andere kovariante Regularisierung, wie sie etwa von 't Hooft [14] vorgeschlagen wird, genauso sinnvoll. Trotzdem wurde in [3] die PV-Regularisierung bei der Behandlung der Selbstenergie des λ_μ -Feldes zugrundegelegt, was durch einen transversalen induzierten kinetischen Operator belohnt wurde. Auch wir haben uns nicht anders verhalten (siehe z. B. Anhang D.3).

Die verbleibenden induzierten freien Wirkungsterme transformieren sich allerdings nicht-trivial unter $U(1)_{loc}$. Sie gehören entweder zur Klasse K_3 ($a+c=1, b=1 \vee b=0$), bzw. stammen sie aus K_2 ($a+c=2, b=0$). Jetzt ist es notwendig, ein mit der Eichinvarianz verträgliches Regularisierungsprinzip anzuwenden (hier: PV). Die Spur-Eigenschaften der Dirac-Matrizen γ^μ machen in Verbindung mit dem verallgemeinerten Furry-Theorem aus Anhang C.1 deutlich, daß eine Taylor-Entwicklung der ultraviolett divergenten Feynman-Amplituden jeder Klasse K_D nach Potenzen von m^2 angegeben werden kann (man darf von geradzahligem $(a+b)$ ausgehen).

K_3 wird daher vollständig regularisiert, sobald je zwei PV-Parameter ω_1, ω_2 und Cutoff-Massen Ω_1, Ω_2 derart gewählt werden, daß sowohl das erste als auch das dritte Massenmoment von m verschwinden; diese Bedingungen lassen sich in der Form

$$\left(\frac{\omega_1 \Omega_1}{m}\right) + \left(\frac{\omega_2 \Omega_2}{m}\right) = -1 \quad (5.37)$$

$$\left(\frac{\omega_1 \Omega_1}{m}\right) \cdot \Omega_1^2 + \left(\frac{\omega_2 \Omega_2}{m}\right) \cdot \Omega_2^2 = -m^2$$

schreiben. Ähnlich erledigen wir die Regularisierung von K_2 , wobei neue PV-Parameter τ_1, τ_2 und zugeordnete Cutoffs T_1, T_2 wie folgt ausgesucht werden:

$$\begin{aligned} \tau_1 + \tau_2 &= -1 \\ \tau_1 \cdot T_1^2 + \tau_2 \cdot T_2^2 &= -m^2 \end{aligned} \quad (5.38)$$

Das asymptotische Verhalten ($\Omega_1, \Omega_2 \rightarrow \Omega \gg m$ bzw. $T_1, T_2 \rightarrow T \gg m$) verschiedener Massenmomente mit dem Gewichsfaktor ($\ln m^2$) läßt sich wieder aus Anhang B entnehmen. Insbesondere muß in den Amplituden (31) $R_5(3)$ wegen (37) durch

$$\begin{aligned} m \left(\frac{\omega_1 \Omega_1}{m}\right) \Omega_1^2 \cdot \ln \frac{\Omega_1^2}{m^2} + m \left(\frac{\omega_2 \Omega_2}{m}\right) \Omega_2^2 \cdot \ln \frac{\Omega_2^2}{m^2} \rightarrow \\ m \cdot \frac{1}{2} R_2(1)|_{\Lambda \rightarrow \Omega} = m \cdot \Omega^2 \end{aligned} \quad (5.39)$$

ersetzt werden. Außerdem tritt anstelle von $R_5(1)$ nun der Ausdruck $m \cdot \ln \frac{\Omega^2}{m^2}$.

Wir haben festgestellt, daß die asymptotischen Skalen Ω, T sowie ein weiterer Cutoff C für die Wechselwirkungen aus K_4 nicht voneinander abhängen. Wenn Amati et al dennoch zu einem gemeinsamen Abschneidewert Λ übergehen, können phänomenologische Folgerungen bezüglich der Bedeutung und relativen Größenordnung von effektiven Massen und Kopplungskonstanten nicht mehr zwingend sein. Darüberhinaus zeigt das zu Beginn dieses Abschnitts angewandte andere PV-Verfahren, daß sich beträchtliche Veränderungen der Kopplungsparameter einstellen (einschließlich eines Vorzeichenwechsels). Selbst mit einer Umdefinition des Cutoffs können die Unterschiede nicht mehr überbrückt werden.

5.2.4. DISKUSSION DER INDUZIERTEN KINETISCHEN OPERATOREN

Es liegen alle Amplituden vor, um den in den Feldern bilinearen Teil der effektiven Wirkung (Bezeichnung: $\mathcal{S}_{eff}^{(2)}$) nach (26) zu bilden:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{eff}^{(2)} = \int \frac{d^4 p}{N} \left\{ A^\mu(p) \lambda_\mu(-p) \cdot v + \frac{1}{2} A^\mu(p) (-i\omega_{\mu\nu}^{(A^\mu A^\nu)}(p)) A^\nu(-p) \right. \\ \left. + 1 \cdot A^\mu(p) (-i\omega_{\mu\nu}^{(A^\mu \lambda_\nu)}(p)) \cdot \lambda^\nu(-p) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \lambda^\mu(p) (-i\omega_{\mu\nu}^{(\lambda^\mu \lambda^\nu)}(p)) \lambda^\nu(-p) + \frac{1}{2} \lambda(p) (-i\omega^{(\lambda\lambda)}(p)) \cdot \lambda(-p) \right\} \end{aligned} \quad (5.40)$$

Allerdings haben wir die 1-Loop-Diagramme bisher nicht oberhalb der Paarerzeugungsschwelle $p^2 = 4m^2$ fortgesetzt. Wenn man aber die weit unterhalb der Konstituentenmasse m gültige Dynamik betrachtet, können die Amplituden (31) schon nach den in p quadratischen Termen abge-

brochen werden. Der "Niederenergiebereich" besitzt dann näherungsweise die effektive Wirkung:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}'_{eff}(2) = & \frac{1}{4\pi^2} \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} (A_\mu(x) \quad , \quad \lambda_\mu(x)) \right. \\
 & \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} R_5(0) \Pi^{\mu\nu} \square & \frac{R_5(1)}{6} \Pi^{\mu\nu} \square \\ \frac{R_5(1)}{6} \Pi^{\mu\nu} \square & \frac{5}{4} R_5(4) \eta^{\mu\nu} + \\ & \frac{5}{12} R_5(2) \cdot \Pi^{\mu\nu} \square \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_\nu(x) \\ \lambda_\nu(x) \end{pmatrix} \\
 & \left. + \frac{1}{2} \lambda(x) (3R_5(2) + \frac{1}{2} R_5(0) \cdot \square) \lambda(x) \right\} \\
 & \text{mit } \Pi^{\mu\nu} \cdot \square = \eta^{\mu\nu} \square - \partial^\mu \partial^\nu;
 \end{aligned} \tag{5.41}$$

Verglichen mit (9) verfügt das frühere Hilfsfeld $A^\mu(x)$ infolge der 1-Schleifen-Korrektur über einen eigenen kinetischen Term proportional zur Maxwell-Lagrangedichte. $\mathcal{S}'_{eff}(2)$ enthält das zusammengesetzte Vektorpotential ausschließlich in der Form des eichinvarianten Feldstärkentensors $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$. Die Gap-Gleichung (34) ermöglicht nämlich, daß der aus der klassischen Lagrangedichte übernommene eichvariante Kontaktterm $\int d^4x (v \cdot \lambda_\mu A^\mu)$ und der ableitungsfreie Anteil der 1-Schleifen-Wechselwirkung zwischen A^μ, λ_ν (vgl. (31b)) sich gegenseitig aufheben.

Die unerwartete Invarianz von (41) unter lokalen $U(1)$ -Transformationen (11) ist kein Wunder. Zur Erklärung dieser Eigenschaft erinnern wir an die getrennte formale Eichinvarianz des klassischen und des auf Quantenfluktuationen beruhenden Anteils der effektiven Wirkung (16) unter den Transformationsgesetzen (11), (13). Der Tadpole-Beitrag des skalaren Multiplikatorfeldes λ in $\mathcal{S}_{eff}$ besitzt notwendig die Gestalt

$$\begin{aligned}
 T &= c \cdot \int d^4x \lambda(x) \quad (c \text{ konstant}) \\
 \Rightarrow \delta T &= \int d^4x (\lambda_\mu(x) \alpha'^\mu(x)) = c \cdot \delta \int d^4x (\lambda_\mu(x) A^\mu(x))
 \end{aligned}$$

Die Eichinvarianz des $(-i \cdot \text{Tr} \ln)$ -Terms erzwingt, daß die $(\lambda_\mu - A_\nu)$ -Wechselwirkung nur wie

$$\begin{aligned}
 W &= -c \int d^4x \lambda_\mu A^\mu + \tilde{c} \cdot \int d^4x \lambda^{\mu,\nu} F_{\mu\nu} \\
 &+ \{\text{Terme mit mehr als 2 Ableitungen}\} \quad (\tilde{c} : \text{konstant})
 \end{aligned}$$

ausfallen kann. Die Summe aus den klassischen bosonischen Kontakttermen und den 1-Schleifen-Resultaten T, W ergibt:

$$\int d^4x (v - c) \cdot (\lambda_\mu A^\mu - \lambda) + \tilde{c} \int d^4x \partial^\nu \lambda^\mu \cdot F_{\mu\nu} + \dots$$

Verlangt man Stationarität hinsichtlich des Multiplikators λ (d. h. $v = c$), so fällt natürlich auch der eichvariante Term $\sim \int d^4x (\lambda_\mu A^\mu)$ fort. Wegen (34) ist diese Situation bei uns eingetreten.

Wir können leicht nachweisen, daß sich die formale Eichinvarianz und die PV-Regularisierung der 1-Loop-Amplituden miteinander vertragen.

(11) wird im Impulsraum zu:

$$A_\mu(p) \mapsto A_\mu(p) - i\alpha(p)p_\mu \quad (5.42)$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \delta_\alpha W &= \int \frac{d^4 p}{N} (-i\alpha(p)p^\mu)(\lambda^\nu(-p))(-i\omega_{\mu\nu}^{(A_\mu\lambda_\nu)}(p))|_{PV} \\ &= \int \frac{d^4 p}{N} (-\alpha(p)\lambda^\nu(-p)) \cdot (p^\mu\omega_{\mu\nu}^{(A_\mu\lambda_\nu)}(p))|_{PV} \end{aligned} \quad (5.43)$$

Die Verjüngung von (29b) mit p^μ liefert (wir erinnern an (28)):

$$\begin{aligned} p^\mu\omega_{\mu\nu}^{(A_\mu\lambda_\nu)}(p)|_{PV} &= \int \frac{d^4 l}{N} l_\nu \text{tr}_D(\mathcal{D}(l + \frac{1}{2}p; m) \not{p} \mathcal{D}(l - \frac{1}{2}p; m))|_{PV} \\ &= i \int \frac{d^4 l}{N} l_\nu \text{tr}_D(\mathcal{D}(l - \frac{1}{2}p; m) - \mathcal{D}(l + \frac{1}{2}p; m))|_{PV} \\ &= i \int \frac{d^4 l}{N} \text{tr}_D(\mathcal{D}(l; m)) \cdot \left((l + \frac{1}{2}p)_\nu - (l - \frac{1}{2}p)_\nu \right)|_{PV} \\ &= -p_\nu \cdot iv \end{aligned} \quad (5.44)$$

Zuletzt ergab sich eine Vereinfachung durch die Gap-Gleichung (21c); die während der Umformungen vorgenommenen Translationen des Schleifenimpulses l_ν sind innerhalb der PV-Regularisierung gerechtfertigt.^[20]

Jetzt folgt die Eichinvarianz des effektiven $\lambda_\mu - A^\nu$ -Sektors:

$$\delta_\alpha(W + v \int d^4 x \lambda_\mu(x) A^\mu(x)) = 0 \quad (5.45)$$

Die effektive bilineare Wirkung $\mathcal{S}'_{eff}^{(2)}$ enthält bei niedrigen Energien keine Mischterme von Vektorpotential A^μ bzw. des Vektormultiplikators λ_μ und skalarem Multiplikator λ ; auf diese Entkopplung wurde schon unter (29) hingewiesen. (41) wird noch einfacher, wenn wir in den Matrixelementen Beiträge der relativen Ordnung $(\frac{\partial^2}{\Lambda^2})$ gegenüber den Massentermen unterdrücken (Niederenergienäherung). Außerdem sorgt eine Umskalierung $\tilde{\lambda}_\mu = \Lambda \cdot \lambda_\mu$ dafür, daß der Vektormultiplikator die kanonische Energiedimension 1 annimmt.

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}'_{eff}^{(2)} &= \frac{1}{4\pi^2} \int d^4 x \left\{ \frac{1}{2} \lambda^2(x) \cdot \left(-\frac{\Lambda^2}{2}\right) + \frac{1}{2} (A_\mu(x) \quad , \quad \tilde{\lambda}_\mu(x)) \right. \\ &\quad \cdot \left(\begin{array}{cc} \frac{1}{3} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) \Pi^{\mu\nu} \square & \frac{1}{12} \Pi^{\mu\nu} \square \\ \frac{1}{12} \Pi^{\mu\nu} \square & -\frac{5}{8} \Lambda^2 \cdot \eta^{\mu\nu} \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} A_\nu(x) \\ \tilde{\lambda}_\mu(x) \end{array} \right) \left. \right\} \end{aligned} \quad (5.46)$$

[20] Die Berechnung des vollständigen Diagramms $\omega_{\mu\nu}^{A_\mu\lambda_\nu}(p)$ beansprucht einen erheblich höheren Aufwand, der an dieser Stelle unterbleiben kann.

Die in (33) ausgewerteten Spektralsummen $R_5(e)$ wurden eingesetzt, der asymptotische Limes $\left(\frac{\Lambda}{m}\right) \rightarrow \infty$ war Vorbedingung. Durch einen Vergleich mit (9) stellt man die induzierte $U(1)$ -Kopplungskonstante e des Photonfeldes A^μ fest; die Normierung von A^μ ist so gewählt, daß sich die Maxwell-Lagrangedichte zu $\left(-\frac{1}{4e^2} \cdot F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}\right)$ ergibt:

$$e^2 = \frac{12\pi^2}{\ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right)} \quad (5.47)$$

Amati et al erkennen daraus eine ungefähre Übereinstimmung des Cutoffs Λ mit dem Landau-Geist der QED: die effektive Kopplungskonstante divergiert dabei in der 1-Schleifen-Näherung an der unphysikalischen, euklidischen Stelle $q^2 = -\Lambda^2$.

Erweitert man (46) um einen Eichfixierungsterm für das Vektorpotential A^μ (z. B. mit Hilfe der Lorentzbedingung (4.103)), dann können die effektiven Propagatoren der bosonischen Felder $A^\mu, \tilde{\lambda}_\nu, \lambda$ nach der Inversion der kinetischen Matrix abgelesen werden. Dieser Schritt geschieht in enger Anlehnung an (4.111) und (4.112), wo das $U(1)$ -Verbundeichfeld nach der Konstruktion von Dürr und Saller sehr ähnliche kinetische Terme erwirbt. Im Niederenergiebereich $|p^2| \ll m^2 \ll \Lambda^2$ findet man den kanonischen Propagator eines masselosen Spin-1-Teilchens (bezüglich der gewählten Eichung) für das Photonfeld A^μ , während die Multiplikatormoden $\lambda(x), \tilde{\lambda}_\mu(x)$ dort nicht propagieren. Letzteres trifft ebenfalls für den "Austausch"-Propagator $\langle 0 | A^\mu(x) \lambda_\nu(y) | 0 \rangle$ zu.

5.3. ÄNDERUNG DER DEFINITION DES EICHPOTENTIALS

Wenn wir die Untersuchung der effektiven Wirkung (24) auf die induzierten Kopplungen von bis zu vier bosonischen Variablen $\lambda, A_\mu, \tilde{\lambda}_\nu$ ausdehnen und uns dabei auf konstante Felder beschränken oder den Grenzfall ausschließlich langwelliger Fourierkomponenten betrachten, dann entsteht:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{eff|A_\mu, \lambda_\nu, \lambda = \text{const}} &= \frac{1}{(4\pi)^2} \int d^4x \left\{ 6 \cdot R_5(2) \left(\lambda - \frac{\tilde{\lambda}_\mu}{\Lambda} A^\mu \right)^2 \right. \\ &\quad - 10 \cdot \frac{R_5(3)}{\Lambda^2} \left(\lambda - \frac{\tilde{\lambda}_\mu}{\Lambda} A^\mu \right) (\tilde{\lambda}_\nu \tilde{\lambda}^\nu) - 4 \cdot R_5(1) \left(\lambda - \frac{\tilde{\lambda}_\mu}{\Lambda} A^\mu \right)^3 + \frac{5}{2} \cdot \frac{R_5(4)}{\Lambda^2} (\tilde{\lambda}_\mu \tilde{\lambda}^\mu) \\ &\quad + x \cdot \frac{R_5(4)}{\Lambda^4} (\tilde{\lambda}_\mu \tilde{\lambda}^\mu)^2 + y \cdot \frac{R_5(2)}{\Lambda^2} (\tilde{\lambda}^\mu \tilde{\lambda}_\mu) \cdot \lambda^2 + z \cdot R_5(0) \cdot \lambda^4 \\ &\quad \left. + \{ \text{Terme höherer als 4. Ordnung in } A_\mu, \lambda_\nu, \lambda \} \right\} \quad (x, y, z \in \mathbb{Q}) \end{aligned} \quad (5.48)$$

Nicht von ungefähr erscheint das Eichpotential A^μ stets eingebunden in den Lorentz-skalaren Ausdruck

$$\varrho := \lambda - \frac{\tilde{\lambda}_\mu A^\mu}{\Lambda} \quad (5.49)$$

wenigstens, soweit wir die höheren Wechselwirkungen explizit angegeben haben. Gegenüber den Transformationsregeln (11), (13) erweist sich ϱ als invariantes Skalarfeld; die Struktur von (48) hängt daher eng mit der $U(1)$ -Eichinvarianz der effektiven Wirkung $\mathcal{S}_{eff}$ zusammen. Wir sehen

aber auch, daß mehrere Kopplungen höherer Ordnung nicht Funktionen des Feldstärkentensors $F_{\mu\nu}$ allein darstellen. Das von Amati et al benutzte Modell wird in [3] fälschlich als äquivalent zur üblichen Quantenelektrodynamik eingestuft; die in (48) gefundenen Kopplungen widerlegen jedoch diese Ansicht.

Eine Spinortheorie für das zusammengesetzte Eichpotential A_μ , welche bereits unter (11) invariant bleibt, kann durch geringfügige Änderung der Zwangsbedingungen aus (9) gewonnen werden. Wir machen den Vorschlag:

$$\mathcal{L}_{(Am_2)} := \bar{\psi}(i\partial - A - m)\psi + \lambda_\mu(A^\mu\bar{\psi}\psi - \bar{\psi}i\partial^\mu\psi) + \varrho(\bar{\psi}\psi - v) \quad (5.50)$$

ϱ ist hier ein unabhängiges Skalarfeld; wenden wir jedoch die Substitution (49) an, so erhalten wir die ursprüngliche Lagrangedichte (9) zurück. Die $U(1)$ -Eichinvarianz der effektiven bosonischen Wirkung zu $\mathcal{L}_{(Am_2)}$ wird im Anhang E überprüft. Auch auf (50) trifft die Feststellung von Amati et al zu, daß der klassische $U(1)$ -Noether-Strom trivial verschwindet (siehe auch (4.72)). Weil der $\lambda_\mu A^\mu$ -Kontaktterm diesmal ausbleibt, fehlen induzierte 1-Schleifen-Wechselwirkungen mit äußeren Spinorbeinen völlig. Daher stimmt die effektive Wirkung, welche nach der Ausintegration der Spinorfelder $\bar{\psi}, \psi$ zur Verfügung steht, bereits mit der 1-Loop-Näherung des erzeugenden Funktionals Γ überein (vgl. Kapitel 3).

6. Effektive Dynamik eines zusammengesetzten $SU(2)$ -Eichfeldtriplett

6.1. YANG-MILLS-EICHFELD AUS SUBKANONISCHEN SPINOREN

Im Abschnitt 2.4 wurde das nichtlokale, von Ableitungsoperatoren freie Operatorprodukt

$$A^\mu := a \cdot (4\pi)^2 : \bar{\chi} \gamma^\mu \tilde{\chi} :, \quad a = \frac{1}{2} \quad (6.1)$$

des subkanonischen Spinorfeldes $\tilde{\chi}$ vorgestellt, welches bei einer infinitesimalen $U(1)$ -Umeichung der Polfelder

$$\psi_i(x) \mapsto e^{-i\alpha(x)} \psi_i(x) \quad (6.2)$$

das inhomogene Transformationsgesetz

$$A^\mu \mapsto A^\mu + \alpha'^\mu \quad (6.3)$$

des QED-Eichpotentials besitzt (siehe (2.86)).

Weil inzwischen nicht-abelsche Eichtheorien für die Phänomenologie der Teilchenphysik besondere Bedeutung erlangt haben, ist es wünschenswert, ausgehend von einer Modelldynamik mit nichtkanonischen Spinorfeldern, zusammengesetzte

Yang-Mills-Eichfelder zu konstruieren und ihre Rolle in der effektiven Wirkung zu untersuchen.

Die Eichgruppe $SU(2)$ steht im Mittelpunkt unserer Überlegungen. Für ihre Fundamentaldarstellung werden Isospin-Dubletts benutzt, deren Komponenten unabhängige Dirac-Polfelder $\psi_i^{(1)}, \psi_i^{(2)}$ gleicher Masse m_i ($i \in \{1, 2, 3\}$) sind. Daraus entsteht als Linearkombination nach (2.42a) ein subkanonisches Dublett, welches der Einfachheit wegen erneut mit $\tilde{\chi}$ bezeichnet wird. Eine Rotation im Isospin-Raum, die durch den Vektor $\vec{\beta}$ gegeben ist, bewirkt also:

$$\tilde{\chi} \mapsto \tilde{\chi}(x) = e^{-i\vec{\sigma}\vec{\beta}/2} \tilde{\chi}(x) =: M(\vec{\beta}(x)) \cdot \tilde{\chi}(x) \quad (6.4)$$

(σ^a ($a \in \{1, 2, 3\}$) sind die zweidimensionalen Pauli-Matrizen) Diese Eigenschaft ermöglicht die Angabe eines Triplets A_μ^i zusammengesetzter $SU(2)$ -Eichfelder in der adjungierten Darstellung:

$$A_\mu^i(x) := b(4\pi)^2 : \bar{\chi} \gamma_\mu \frac{\sigma^i}{2} \tilde{\chi} : \quad (6.5)$$

b ist ein noch offener Parameter, bei dem Produkt aus γ_μ und σ^i handelt es sich um ein Tensorprodukt; die Doppelpunkte verweisen wieder darauf, daß das Operatorprodukt durch "Punktsplaltung"

$$\begin{cases} \tilde{\chi}(x) \mapsto \tilde{\chi}(x_+) \\ \bar{\tilde{\chi}}(x) \mapsto \bar{\tilde{\chi}}(x_-) \end{cases} \quad x_\pm = x \pm \frac{\xi}{2} \quad (6.6)$$

regularisiert wurde und der Grenzübergang $\overline{\lim}_{\xi \rightarrow 0}$ verlangt wird (siehe (2.81)). Es ist nicht nötig, außerdem den c-Zahl-Vakuumerwartungswert

$\langle 0 | T \bar{\tilde{\chi}}(x_-) \gamma_\mu \frac{\sigma^a}{2} \tilde{\chi}(x_+) | 0 \rangle$ für freie Felder zu subtrahieren, denn der Dublett-Propagator ist proportional zu $\sigma^0 = 1$ im Isospinraum. Hingegen verschwindet die Spur von σ^a .

$A_\mu^i(x)$ verhält sich genau wie ein elementares $SU(2)$ -Eichfeld, wenn eine Isospin-Drehung (4) mit Raumzeit-abhängigem Drehvektor $\vec{\beta}(x)$ stattfindet:

$$\begin{aligned}
\hat{A}_\mu^i(x) &= b(4\pi)^2 \overline{\lim}_{\xi \rightarrow 0} \left\{ \bar{\chi}(x_-) M(-\vec{\beta}(x_-)) \gamma_\mu \frac{\sigma_i}{2} M(\vec{\beta}(x_+)) \chi(x_+) \right\} \\
&= b(4\pi)^2 \overline{\lim}_{\xi \rightarrow 0} \left\{ \bar{\chi}(x_-) \left(\gamma_\mu D_{ij}(\vec{\beta}(x)) \frac{\sigma_j}{2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \gamma_\mu M(-\vec{\beta}(x)) \frac{\sigma_i}{2} \left(\frac{\xi \vec{\partial}}{2} \right) M(\vec{\beta}(x)) \right) + o(\xi) \right\} \chi(x_+) \\
&= D_{ij}(\vec{\beta}(x)) A_\mu^j(x) + b(4\pi)^2 \overline{\lim}_{\xi \rightarrow 0} \text{tr} \left\{ -\gamma_\mu \langle 0 | T \chi(x_+) \bar{\chi}(x_-) | 0 \rangle \right. \\
&\quad \left. \cdot M(-\vec{\beta}(x)) \frac{\sigma_i}{2} \left(\frac{\xi \vec{\partial}}{2} \right) M(\vec{\beta}(x)) \right\} \\
&= D_{ij}(\vec{\beta}(x)) A_\mu^j(x) + b \text{tr}_I \left\{ M(-\vec{\beta}(x)) \frac{\sigma_i}{2} i \vec{\partial}_\mu M(\vec{\beta}(x)) \right\}
\end{aligned} \tag{6.7}$$

$D(\vec{\beta})$ ist erklärt durch:

$$M(-\vec{\beta}) \sigma_i M(\vec{\beta}) = D_{ij}(\vec{\beta}) \sigma_j \tag{6.8}$$

Mit Hilfe der $SU(2)$ -Lie-Algebra bestätigt man, daß $D(\vec{\beta}) \in SO(3)$ gilt und $\vec{\beta}$ mit dem räumlichen Drehvektor übereinstimmt. Der Index I fordert die Einschränkung der Spur auf den Isospin-Raum. Um den inhomogenen Bestandteil von (7) zu erhalten, war es ausreichend, das subkanonische, freie Operatorprodukt durch seinen zeitgeordneten Vakuum-Erwartungswert zu ersetzen; denn beim Grenzübergang des Splitvektors $\xi \rightarrow 0$ enthält dieser den führenden, nur wie $\frac{\xi^\mu}{\xi^2}$ divergenten Anteil von $\bar{\chi}(x_-) \chi(x_+)$.

Das Lie-Algebra-Element $A_\mu := A_\mu^i \frac{\sigma_i}{2}$ liefert nach der minimalen Substitution die $SU(2)$ -kovariante Ableitung

$$iD_\mu = i\partial_\mu - \frac{1}{b} A_\mu \tag{6.9}$$

denn aus (7) folgt

$$\tilde{A}_\mu = M(\vec{\beta}(x)) (A_\mu - b \cdot i\partial_\mu) M(-\vec{\beta}(x)) \tag{6.10}$$

wenn man berücksichtigt, daß $D(-\vec{\beta}) = D^T(\vec{\beta})$ und daß $M(\vec{\beta}) \partial_\mu M(-\vec{\beta})$ zur Lie-Algebra gehört.

Ohne weiteres kann $A_\mu(x)$ umskaliert werden; wir nehmen zunächst $b = 1$ an. Nachdem klar wurde, auf welche Weise die Methode der Punkttrennungs-Regularisierung für $SU(2)$ das inhomogene Eichtransformationsgesetz des Vektorpotentials verursacht, liegt es auf der Hand, zusammengesetzte Eichfelder auch von anderen Lie-Gruppen nach diesem Verfahren zu bilden (vgl. auch [3]).

Im Falle der unitären Gruppe $U(n)$, die einen abelschen Faktor $U(1)$ enthält, gelingt dies mit der Einführung von n unabhängigen subkanonischen Spinorfeldern $\tilde{\chi}_\alpha (\alpha \in \{1, 2, \dots, n\})$, die zur Fundamentaldarstellung von $U(n)$ gehören.

Die $(n \times n)$ -Matrix $\underline{W}^\mu$ mit den Elementen

$$W_{\alpha\beta}^\mu = -\frac{b}{2} (4\pi)^2 \overline{\lim}_{\xi \rightarrow 0} \left(\text{tr}_D (\tilde{\chi}_\alpha(x_+) \bar{\tilde{\chi}}_\beta(x_-) \gamma^\mu) + \delta_{\alpha\beta} \frac{i\xi^\mu}{2\pi^2 \xi^2} \right) \tag{6.11}$$

(tr_D bewirkt hier die Spur im Dirac-Raum) bleibt infolge der subtrahierten Operatorprodukt-Greenfunktion endlich, wenn der Splitvektor ξ nach 0 strebt. Nach kurzer Rechnung zeigt sich, daß

$$iD_\mu = i\partial_\mu - \frac{W_\mu}{b} \quad (6.12)$$

eine $U(n)$ -kovariante Ableitung liefert.

Die n^2 Eichfelder zur adjungierten Darstellung sind die Koeffizienten der Zerlegung:

$$\begin{aligned} W_\mu &= \sum_a \left(\frac{\lambda_a}{2}\right) W_\mu^a + \mathbf{1} \cdot B_\mu \\ \Rightarrow W_\mu^a &= \text{tr}(\lambda_a W_\mu), \quad B_\mu = \frac{1}{n} \text{tr}(W_\mu) \end{aligned} \quad (6.13)$$

(die Generatoren der Lie-Algebra erfüllen die Beziehungen:

$$\left[\frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2}\right] = i \cdot f_{abc} \frac{\lambda_c}{2}, \quad \text{Tr}(\lambda_a \lambda_b) = 2\delta_{ab} \quad)$$

Daraus können mit Hilfe einer Projektion auch sofort Eichfelder für eine Untergruppe $G \subset U(n)$ gewonnen werden, deren Lie-Algebra von den im n -dimensionalen Raum eingebetteten normierten Matrizen φ_c aufgespannt sein möge:

$$\dot{W}^\mu = \sum_c \left(\frac{\varphi_c}{2}\right) \text{tr}(\varphi_c \cdot W^\mu) \quad (6.14)$$

ist die Konnektion in der G -kovarianten Ableitung

$$iD_\mu = i\partial_\mu - \frac{1}{b} \dot{W}_\mu \quad (6.15)$$

Der Beweis dazu stützt sich auf die Identität:

$$\sum_c \left\{ \frac{\varphi_c}{2} \text{tr}(H_{cd} \varphi_d W^\mu) \right\} = \sum_c H_{cd}^T \left(\frac{\varphi_d}{2}\right) \text{tr}(\varphi_c W^\mu) \quad (6.16)$$

wonach das G -transformierte W^μ die entsprechende Eichtransformation von $\dot{W}$ hervorruft.

6.2. ERZEUGENDES FUNKTIONAL DER EFFEKTIVEN YANG-MILLS-THEORIE

Ebenso wie im vierten Kapitel, wo durch Quantenfluktuationen für ein Vektorpotential A^μ , welches zuerst nur als Hilfsfeld eingeführt wurde, später eine effektive $U(1)$ -Dynamik entstand, unternehmen wir im Folgenden den Versuch, zu einer effektiven Wirkung für das Yang-Mills-Feld A_μ^i zu gelangen. Die Reihenfolge der einzelnen Schritte ist bereits von der Behandlung des $U(1)$ -Falles her bekannt. Wegen der nichttrivialen $SU(2)$ -Lie-Algebra haben wir aber grundsätzlich andere Wechselwirkungen zwischen den bosonischen Feldern zu erwarten. Diese werden ausführlich betrachtet. Im Abschnitt 6.4 gehen wir auf die Vereinfachungen ein, die im Grenzfall $\Lambda \gg M$ auftreten (Λ, M sind die beiden charakteristischen Massenskalen).

6.2.1. BILINEARE TERME IN DER TAYLOR-ENTWICKLUNG

Das aus dem subkanonischen Spinorfeld-Dublett $\tilde{\chi}$ hergestellte Eichfeldtriplett (5) eröffnet die Möglichkeit, zu einer selbstwechselwirkenden, lokal $SU(2)$ -invarianten Spinor-Lagrangedichte $\mathcal{L}$ zu gelangen. Man erweitert die linearisierte Polfeldform (2.65) durch die minimale Substitution (9) und stellt mit Hilfe von Lagrange-Multiplikatoren ϕ_μ^i ($i \in \{1, 2, 3\}$) die Definition der A_μ^i als nichtlokale Operatorprodukte sicher:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \sum_A \bar{\psi}_A (i\partial - \not{A} - m_A) \epsilon_A \psi_A \\ & + \frac{\Lambda^2}{(4\pi)^2} \phi_\mu^i (A_\mu^i - (4\pi)^2 : \bar{\chi} \gamma_\mu \frac{\sigma_i}{2} \tilde{\chi} :) \quad (\dim[\phi_\mu^i] = 1) \end{aligned} \quad (6.17)$$

(die Polfelder ψ_A stellen hier Isospin-Dubletts dar, die bezüglich ihrer Ruhemasse m_A entartet sind; $A^\mu = A_\mu^i \frac{\sigma_i}{2}$ gehört der $SU(2)$ -Lie-Algebra an).

Da die Zwangsbedingung unter $SU(2)$ -Eichtransformationen (4) sich kovariant verhält, fordern wir, daß das Multiplikator-Triplett ϕ_μ^i ebenfalls zur adjungierten Darstellung gehört:

$$\tilde{\phi}_\mu = M(\vec{\beta}) \phi_\mu M^\dagger(\vec{\beta}) \quad (\phi_\mu = \phi_\mu^i \frac{\sigma_i}{2} \in SU(2)\text{-Lie-Algebra}) \quad (6.18)$$

Weil ein kinetischer Term der $SU(2)$ -Eichbosonen in der klassischen subkanonischen Theorie (17) fehlt, benötigen wir die 1-Schleifen-Quantenkorrekturen, wenn wir die dynamischen Eigenschaften der Verbundfelder kennenlernen wollen.

Man darf sich auf solche Greenfunktionen beschränken, bei denen die Polfelder ψ_A bzw. das subkanonische Feld $\tilde{\chi} = \sum_A \sqrt{|\tilde{e}_A|} \psi_A$ lediglich als virtuelle Teilchen eingehen, wenn letztere wegen der hohen Massenwerte M, Λ nicht erzeugt werden können. Dann führt die Grassmann-Funktionalintegration über die Moden $\psi_A, \bar{\psi}_B$ des erzeugenden Funktional (vgl. (3.18)) zur effektiven Wirkung

$$\begin{aligned} S_{eff} = & \int d^4x \mathcal{L}_{eff}(\vec{A}_\mu, \vec{\phi}_\nu) = \frac{\Lambda^2}{(4\pi)^2} \left\{ \int d^4x (\vec{\phi}_\mu \vec{A}^\mu) \right. \\ & + (4\pi)^2 \cdot \phi_\mu^i \langle 0 | T \bar{\chi}(x_-) \gamma_\mu \frac{\sigma_i}{2} \tilde{\chi}(x_+) | 0 \rangle \Big\} \\ & - i \text{Tr} \ln \left\{ (i\partial - \not{A} - \underline{m}) \cdot \underline{\epsilon} - \Lambda^2 \phi_\tau \gamma^\tau \underline{h} e^{(\frac{i\vec{\theta}}{2})} \right\} \quad ((\underline{h})_{AB} = \sqrt{|\tilde{e}_A \tilde{e}_B|}) \end{aligned} \quad (6.19)$$

der bosonischen Feldvariablen A_μ^i, ϕ_ν^j (vgl. (4.17)). Das $\text{Tr} \ln$ -Operatorargument stellt eine Matrix mit kontinuierlichem Raum-Zeit-Index und diskreten Spektral-, Dirac- sowie Isospin-Indizes dar. Der Taylor-Operator $\exp(\frac{1}{2} \xi \cdot \vec{\theta})$ berücksichtigt die nichtlokale, nach dem Punkttrennungs-Verfahren vorgenommene Konstruktion des $SU(2)$ -Eichfeldes in (5) und regularisiert teilweise die effektiven Wechselwirkungen. Eine geschlossene Form von $\mathcal{L}_{eff}$ wurde erzielt, weil das Hilfsfeld $\vec{A}_\mu$ es trotz der Selbstkopplungen der eichinvarianten Lagrangedichte (17) gestattet, die in den Polfeldern bilineare Gestalt beizubehalten.

Wir entwickeln das $\text{Tr} \ln$ -Funktional, welches aus den durch Quantenfluktuationen hervorgerufenen 1-Loop-Beiträgen besteht, um die Vakuum-Feldkonfiguration $\vec{A}_\mu = \vec{\phi}_\mu = 0$ bis zu Termen, die von 2. Ordnung in den beteiligten Feldern sind; damit erhalten wir die freie effektive Wirkung:

$$S_{eff}^{(2)} = S_{eff}^{(a)} + S_{eff}^{(b)} \quad (6.20)$$

wobei

$$\begin{aligned} S_{eff}^{(a)} = & \int d^4x \text{tr}_I(A_\mu) \int \frac{d^4l}{N} \sum_A \text{tr}_{F,D}(i\mathcal{D}(l; m_A) \cdot \gamma^\mu) |_{PV} \\ & + \int d^4x \text{tr}_I(\phi^\mu) \cdot \Lambda^2 \cdot \left\{ \int \frac{d^4l}{N} \sum_A \tilde{e}_A \text{tr}_{F,D}(i\mathcal{D}(l; m_A) \cdot \gamma_\mu e^{-il\xi}) \right. \\ & \left. + \langle 0 | T \bar{\chi}(x_-) \gamma_\mu \tilde{\chi}(x_+) | 0 \rangle \right\} \end{aligned} \quad (6.21)$$

und

$$\begin{aligned} S_{eff}^{(b)} = & \int \frac{d^4p}{N} \left\{ \frac{1}{2} \text{tr}_I(A_\mu(p) A_\nu(-p)) \sigma_{AA}^{\mu\nu}(p) + \frac{1}{2} \text{tr}_I(\phi_\mu(p) \phi_\nu(-p)) \cdot 4\Lambda^4 w^2 \sigma_{\lambda\lambda}^{\mu\nu}(p) \right. \\ & \left. + \text{tr}_I(A_\mu(p) \phi_\nu(-p)) \cdot 2\Lambda^2 w \sigma_{A\lambda}^{\mu\nu}(p) \right\} \quad (w = (4\pi)^{-2}) \end{aligned} \quad (6.22)$$

den linearen bzw. bilinearen Anteil bedeuten.^[21] Die Kontinuum-Spur wurde in der Impulsraum-basis $|p\rangle$ erledigt (vgl. Anhang A.2); unter tr_I ist die Spurbildung im Isospin-Raum zu verstehen. Natürlich verschwindet $S_{eff}^{(a)}$, wie es die genannten Vakuum-Erwartungswerte für $\vec{A}_\mu, \vec{\phi}_\nu$ verlangen; dabei muß nicht einmal die Spurfreiheit der Isospin-Algebra in Anspruch genommen werden.

Wir achten besonders auf effektive Beiträge, deren Skalendimension den Wert 4 nicht überschreitet. Andernfalls erscheinen stets inverse positive Massenpotenzen als Koeffizienten, wie eine Dimensionsbetrachtung zeigt. Wir können die expliziten Ausdrücke (4.27), (4.29), (4.48) für die einzelnen Amplituden $\sigma^{\mu\nu}$ benutzen und finden folgende Massenterme bzw. minimale kinetische Terme der bosonischen Variablen $\vec{A}_\mu, \vec{\phi}_\nu$:

$$\begin{aligned} S_{eff}^{(2)} = & \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \text{tr}_I((\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \cdot (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)) \cdot \sum_B \frac{\bar{R}_B(0)}{24\pi^2} \right. \\ & + \text{tr}_I((\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu \phi^\nu - \partial^\nu \phi^\mu)) \cdot (-\frac{2}{3} \epsilon \zeta w) \\ & + \frac{\Lambda^2}{2} \text{tr}_I(\phi_\mu \phi^\mu) a_{\phi\phi} \cdot w \\ & \left. + \frac{1}{2} \text{tr}_I(\partial_\mu \phi_\nu \partial^\mu \phi^\nu) b_{\phi\phi} \cdot w + \frac{1}{2} \text{tr}_I(\partial_\mu \phi_\nu \partial^\nu \phi^\mu) \cdot c_{\phi\phi} \cdot w \right\} \end{aligned} \quad (6.23)$$

Mit Ausnahme des reinen Eichfeld-Sektors lassen sich die jeweiligen Koeffizienten als Funktionen des Massenverhältnisses

$$\varrho := \frac{M^2}{\Lambda^2} < 1 \quad (6.24)$$

^[21] $D(l; m) = (\mu - m)^{-1}$; die regularisierten Amplituden $\sigma_{AA}^{\mu\nu}, \sigma_{A\lambda}^{\mu\nu}, \sigma_{\lambda\lambda}^{\mu\nu}$ kommen bereits in Kapitel 4 vor (vgl. (4.26a-c)).

allein angeben. Daneben verwenden wir noch die beiden Hilfsgrößen

$$\epsilon = \ln \frac{1}{\varrho} = \ln \frac{\Lambda^2}{M^2} > 0, \quad \zeta = \Lambda^2 \tilde{\varrho}_M = (1 - \varrho)^{-1} > 0 \quad (6.25)$$

und weisen auf die Polynom-Notation (D.22) hin; die Auswertung von (4.29), (4.30) ergibt sodann:

$$\begin{aligned} a_{\phi\phi} &= 2\zeta^2 \{ \epsilon \zeta [0^2, -2] + [-1, 3] \} \\ b_{\phi\phi} &= \frac{4}{3} \zeta^4 \{ \epsilon \zeta [-1, 3, -3, -1] + \frac{1}{6} [7, -23, 31, -3] \} \\ c_{\phi\phi} &= \frac{4}{3} \zeta^4 \{ \epsilon \zeta [1, -3, -3, 1] + \frac{1}{3} [-5, 22, -5] \} \end{aligned} \quad (6.26)$$

Schließlich gilt erneut:

$$\bar{R}_B(0) = \bar{\varrho}_B^{(1)} \ln \frac{(\bar{\Lambda}_B^{(1)})^2}{m_B^2} + \bar{\varrho}_B^{(2)} \ln \frac{(\bar{\Lambda}_B^{(2)})^2}{m_B^2} \quad (6.27)$$

Die Skalen $\bar{\Lambda}_B^{(i)}$ ($i \in \{1, 2\}$) bezeichnen Cutoffs, welche bei der PV-Regularisierung des reinen Eichsektors eingeführt wurden (siehe auch (4.48)). Dort wirkt sich nämlich das günstige UV-Verhalten des subkanonischen Propagators (2.51b) leider nicht mehr aus.

Die freien bilinearen Terme der effektiven Wirkung sind selbst noch nicht invariant unter den Transformationen (10), (18). In mehreren Schritten werden in den kommenden Abschnitten höhere induzierte Wechselwirkungen einbezogen, die die $SU(2)$ -Variationen von $S_{eff}^{(2)}$ aufzuheben in der Lage sind.

6.2.2. WEITERE KOPPLUNGEN AUS DEM REINEN EICHSEKTOR

Die Klasse der effektiven Wechselwirkungen, die sämtliche Monome mit genau a Faktoren des Eichfeldes A_μ^i , f Faktoren des zugeordneten Multiplikatorfeldes ϕ_ν^j sowie d partiellen Raum-Zeit-Differentiationen ∂_ρ enthält, werde $I(a, f; d)$ genannt. Die Skalendimension jedes Angehörigen dieser Klasse beträgt $(a + f + d)$. Eine infinitesimale $SU(2)$ -Umeichung (Parameter $\vec{\beta}$) ruft gemäß (10), (18) die Variationen

$$\begin{aligned} \delta A_\mu^i &= (\vec{\beta} \times \vec{A}_\mu)^i + \beta_{i,\mu}^i \\ \delta \phi_\nu^j &= (\vec{\beta} \times \vec{\phi}_\nu)^j \end{aligned} \quad (6.28)$$

hervor, was eine Klassenabbildung

$$I(a, f; d) \mapsto I(a, f; d) \cup I(a - 1, f; d + 1) \quad (6.29)$$

nach sich zieht.

$\Rightarrow$

$$I_f(g) = \bigcup_{a+d=g} I(a, f; d) \quad (a \in \mathbb{N}, d \in \mathbb{N}_0) \quad (6.30)$$

gehen unter (28) in sich selbst über; jede $SU(2)$ -eichinvariante Wechselwirkung läßt sich daher als Summe schreiben, worin die einzelnen Glieder aus den Klassen $I_f^{(g)}$ stammen. Umgekehrt kann

ein beliebiges Wechselwirkungsmonom $\in I_f^{(g)}$ nur mit Hilfe der übrigen Elemente dieser Klasse zu einer Invarianten der Eichgruppe erweitert werden.

So gehört etwa der kinetische Term des Eichfeldes A^μ zur Klasse $I_2^{(2)} = I(2, 0; 2) \cup I(3, 0; 1) \cup I(4, 0; 0)$. Die Hinzunahme der 1-Schleifen-Diagramme mit drei bzw. vier äußeren Eichfeldbeinen beantwortet deshalb die Frage, ob der reine A^μ -Sektor von (19) bis zu Gliedern der Dimension 4 eichinvariant bleibt.

Selbstverständlich kann man sich im Voraus die formale Eichinvarianz einer effektiven 1-Schleifen-Wirkung vom Typ (19) klarmachen, wie es in Anhang E.2 auch geschieht. Die eichinvariante $SU(2)$ -Yang-Mills-Lagrangedichte

$$\int d^4x \mathcal{L}_{YM} = - \int d^4x \frac{1}{2} \text{tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \quad (6.31)$$

mit $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i[A_\mu, A_\nu] = [D_\mu, D_\nu] \cdot (-i)$

als nicht-abelschem Feldstärkentensor sollte dann notwendig in S_{eff} enthalten sein — abgesehen vom einem Normierungsfaktor, den ein Vergleich mit (23) sofort liefert.

Stattdessen setzen wir hier die $\text{Tr} \ln$ -Entwicklung des reinen Eichfeldsektors fort, um die fehlenden Klassenelemente aus $I(3, 0; 1)$ bzw. $I(4, 0; 0)$ zu konstruieren:

$$S_{eff}(\phi_\mu = 0) = -i \text{Tr} \ln(1 - \frac{1}{i\partial - \underline{m}} \mathcal{A}) := \sum_{m=2}^{\infty} G_{2m} \quad (6.32)$$

G_{2m} beinhaltet alle Eichfeldkopplungen der gleichen Skalendimension ($2m$). Hingegen sind Beiträge ungerader Dimension nicht vertreten, weil deren Schleifen-Integrale aus Symmetriegründen wegfallen. Wir stellen die Wechselwirkungen der niedrigstmöglichen Dimension 4 zusammen:

$$\begin{aligned} G_4 = & \frac{1}{2} \int \frac{d^4p}{N} \text{tr}_1(A_\mu(p) A_\nu(-p)) \Pi^{\mu\nu} \cdot p^2 \frac{\sum_B \bar{R}_B(0)}{12\pi^2} \\ & + \frac{1}{3} \int \frac{d^4p}{N} \frac{d^4q}{N} \text{tr}_1([A_\mu(p), A_\nu(q)] A_\omega(-p-q)) \cdot \sigma_{A^3\partial}^{\mu\nu\omega}(p) \\ & + \frac{1}{4} \int \frac{d^4p}{N} \frac{d^4q}{N} \frac{d^4r}{N} \text{tr}_1(A_\mu(p) A_\nu(q) A_\omega(r) A_\epsilon(-p-q-r)) \sigma_{A^4}^{\mu\nu\omega\epsilon} \end{aligned} \quad (6.33)$$

wobei die Lorentztensoren

$$\begin{aligned} & \{\sigma_{A^3\partial}^{\mu\nu\omega}(p) - \sigma_{A^3\partial}^{\nu\mu\omega}(q)\} \quad \text{mit} \\ \sigma_{A^3\partial}^{\mu\nu\omega}(p) = & i \int \frac{d^4l}{N} \sum_A \text{tr} \left(\mathcal{D}(l; m_A) (-\not{p}) \mathcal{D}(l; m_A) \gamma^\mu \mathcal{D}(l; m_A) \gamma^\nu \mathcal{D}(l; m_A) \gamma^\omega \right) \Big|_{PV} \\ \sigma_{A^4}^{\mu\nu\omega\epsilon} = & i \int \frac{d^4l}{N} \sum_A \text{tr} \left(\mathcal{D}(l; m_A) \gamma^\mu \mathcal{D}(l; m_A) \gamma^\nu \mathcal{D}(l; m_A) \gamma^\omega \mathcal{D}(l; m_A) \gamma^\epsilon \right) \Big|_{PV} \end{aligned} \quad (6.34)$$

die in den äußeren Impulsvariablen p, q, r linearen bzw. konstanten Anteile der entsprechenden Feynman-Amplituden darstellen. Man gewinnt sie aus den Anfangsgliedern der geometrischen Reihenentwicklung

$$\begin{aligned} \frac{1}{\not{p} - \not{q} - m} &= \mathcal{D}(p - q; m) = \mathcal{D}(p; m) + \mathcal{D}(p; m) \not{q} \mathcal{D}(p; m) + o(q) \\ &= \mathcal{D}(p; m) + q^\alpha \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial q^\alpha} \right) \mathcal{D}(p - q; m) \right\}_{|q=0} + o(q) \end{aligned} \quad (6.35)$$

für den Dirac-Propagator $i\mathcal{D}$. Jede der beiden Amplituden $\sigma_{A^3\partial}, \sigma_{A^4}$ divergiert oberflächlich, weshalb das Pauli-Villars-Verfahren zur Regularisierung verwendet wird, da es den formal durchgeführten Beweis der Eichinvarianz nicht beeinträchtigt (vgl. Anhang E.2).

Zum Glück erlaubt die Identität (35), die Tensoren $\sigma_{A^3\partial}, \sigma_{A^4}$ aus dem Vakuumpolarisations-Tensor $\sigma_{AA}^{\mu\nu}$ herzuleiten (vgl. (4.26a), (4.27)):

$$\begin{aligned} \sigma_{A^3\partial}^{\mu\nu\omega} &= p^\alpha \left(\frac{\partial^2}{\partial p^\alpha \partial r^\nu} \sigma_{AA}^{\mu\omega}(p + r) \right)_{|p=r=0} \\ &= p^\alpha \frac{\partial^2}{\partial s^\alpha \partial s^\nu} \sigma_{AA}^{\mu\nu}(s)_{|s=0} \\ &= \{ \eta^{\mu\omega} \cdot 2p^\nu + \eta^{\mu\nu}(-p^\omega) + \eta^{\omega\nu}(-p^\mu) \} \cdot \frac{\bar{R}_B(0)}{12\pi^2} \end{aligned} \quad (6.36)$$

sowie

$$\begin{aligned} \sigma_{A^4}^{\mu\nu\omega\ell} &= - \frac{\partial}{\partial p^\ell} \sigma_{A^3\partial}^{\mu\nu\omega}(p, q) \\ &= \{ -2\eta^{\mu\omega} \eta^{\nu\ell} + \eta^{\mu\nu} \eta^{\omega\ell} + \eta^{\mu\ell} \eta^{\omega\nu} \} \cdot \frac{\bar{R}_B(0)}{12\pi^2} \end{aligned} \quad (6.37)$$

Nachdem die Verjüngungen der Lorentzindizes im Ausdruck (33) erledigt wurden und man mit einer Fourier-Transformation in den Konfigurationsraum zurückkehrt, ergeben die im Eichfeld quadratischen, kubischen und quartischen Beiträge tatsächlich eine Yang-Mills-Lagrangedichte

$$G_4 = \int d^4x \frac{\mathcal{L}_{YM}}{g^2}; \quad g = \sqrt{\frac{24\pi^2}{-\sum_B \bar{R}_B(0)}} \quad (6.38)$$

Die Berechnung einer einzigen Amplitude für konstante äußere Felder reicht aus, um unterstützt durch Invarianzbetrachtungen den Lorentzskalar der nächsthöheren Dimension 6 zu ermitteln:

$$\begin{aligned} G_6 &= \frac{\sum_A m_A^{-2}}{180(4\pi)^2} \cdot \int d^4x \left\{ \text{tr}_I \left([D_\alpha, F_{\beta\gamma}] \cdot [D^\alpha, F^{\beta\gamma}] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 26[D_\alpha, F^{\alpha\sigma}] \cdot [D^\beta, F_{\beta\sigma}] \right) \right\} \end{aligned} \quad (6.39)$$

Der Weg, auf dem dieses Ergebnis erzielt wurde, wird im Anhang Teil F.1 ausführlich beschrieben.

Falls man annimmt, daß die PV-Regulatormassen $\bar{\Lambda}_B^{(i)}$ ($i \in \{1, 2\}$) wesentlich größer als der Polfeldmassenparameter Λ sind, so kann die bilineare Kopplung zwischen A_μ^i und dem Multiplikatorfeld ϕ_ν^j in $\mathcal{S}_{eff}^{(2)}$ unberücksichtigt bleiben (siehe (23)). Die Fermion-1-Schleifen-Korrekturen der wechselwirkenden Spinorthorie verwandeln das zusammengesetzte Hilfsfeld A_μ^i in ein kanonisches Eichfeld, dessen Kopplungskonstante bezüglich der Polfelder der Parameter g aus (38) ist. Die Umskalierung

$$\begin{aligned} A_\mu &\mapsto A_\mu \cdot g \\ F_{\mu\nu} &\mapsto g(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu]) \end{aligned} \quad (6.40)$$

welche auch in (17) stattfindet ($(i\partial - \not{A}) \mapsto (i\partial - g \cdot \not{A})$), unterstreicht dies.

Bereits während der Untersuchung des abelschen $U(1)$ -Falls (Kapitel 4) stellte sich heraus, daß selbstwechselwirkende, subkanonische Spinormodelle effektive, kanonische Eichtheorien für geeignete Verbundfelder ergeben; jedoch reichen die Ruhmassen-Pole M, Λ des $\tilde{\chi}$ -Propagators nicht aus, um die induzierte Kopplungskonstante festzulegen.

Inwiefern allerdings die als unbeobachtbar eingestuft Polfelder ψ_A als Ersatz für Materie-Verbundfelder (Leptonen, Hadronen etc.) dienen dürfen muß hier noch offenbleiben. Erst deren Kopplungen an das Yang-Mills-Feld A^μ sind phänomenologisch bedeutsam. Das nachfolgende Kapitel 7 versucht, darauf eine Antwort zu geben.

Wir schätzen $\bar{\Lambda}^{(i)}$ im asymptotischen Grenzfall gleicher PV-Cutoffs $\gg \Lambda, M$ ab und setzen dazu $g \sim 1$ voraus (die Kopplungen der geladenen schweren W-Bosonen im Standardmodell der elektroschwachen Theorie besitzen diese Größenordnung).

$\Rightarrow$

$$24\pi^2 \approx -3 + 3 \ln \frac{\bar{\Lambda}^2}{M^2} - 2 \ln \left(\frac{\Lambda^2}{M^2} \right)$$

wenn wir mit der Beziehung (4.28) arbeiten. Das Zahlenbeispiel

$$\begin{aligned} M &\approx 100 \text{ GeV} \\ \Lambda &\approx 10^{19} \text{ GeV} \quad (\text{Planck - Skala}) \end{aligned}$$

verlangt daher eine PV-Regularisierungsskala

$$\bar{\Lambda} \approx 5 \cdot 10^{30} \text{ GeV} \quad (6.41)$$

Es sei noch erwähnt, daß das Massenquadrat des Multiplikatortripletts $\vec{\phi}_\mu$ negativ ist (siehe (23), benutze (26)). Von einem Tachyon zu sprechen, ist jedoch nicht gerechtfertigt, weil die Dynamik in der Umgebung der betreffenden Massenskala $\sim \Lambda$ sicherlich von der effektiven Wirkung $\mathcal{S}_{eff}$ abweicht.

6.3. DIE WECHSELWIRKUNGEN MIT DEM MULTIPLIKATORFELD

6.3.1. DIE EICHINVARIANZ LEGT DIE STRUKTUR DER KOPPLUNGEN FEST

Es ist zweckmäßig, sich wieder an die Klasseneinteilung (vgl. (30))

$$I_f^{(g)} = \bigcup_{a+d=g} I(a; f; d) \quad (a \in \mathbb{N}, d \in \mathbb{N}_0)$$

der 1-Schleifen-Kopplungen zu halten, worin der Index f die Zahl äußerer Multiplikatorfelder ϕ_ν^j angibt und das hochgestellte Symbol g die Summe der Skalendimensionen von a äußeren Vektorpotentialbeinen A^μ und d partiellen Ableitungen der Felder ausdrückt. Denn die lokale Eichinvarianz der effektiven Wirkung (19) besteht genau dann, falls die Kopplungen bereits klassenweise während der Transformationen (28) nicht verändert werden.

In den kommenden Unterabschnitten behandeln wir vollständig die Klassen $I_1^{(3)}, I_2^{(2)}, I_3^{(1)}, I_4^{(0)}$, welche mit Ausnahme des reinen Eichfeldsektors $I_0^{(4)}$ sämtliche Kopplungen der Skalendimension 4 umfassen. Die Eigenschaft der beiden bosonischen Felder, Lorentz-4-Vektoren zu sein, verhindert skalare Wechselwirkungen ungerader Dimension $D = (f + g)$. Selbst die Punkttrennungs-Regularisierung, welche an jedem Multiplikator-Vertex erscheint, ändert daran nichts, weil die begleitende Mittelung über den euklidischen Raumwinkel des Trennungs-Vektors ξ (Dimension (-1)) eine ungerade Anzahl Faktoren ξ_ρ in der Loop-Amplitude verbietet. Übrigens zeigt die Untersuchung des UV-Verhaltens von Fermion-1-Schleifendiagrammen innerhalb der subkanonischen Spinorthorie (siehe Abschnitt 4.1.2), daß bis auf die bilineare $A^\mu \phi_\nu$ -Kopplung der Cutoff ξ_ρ schon vor der Schleifenimpuls-Integration fortfallen darf.

Wir bestätigen nun die Invarianz des regularisierten Wirkungsfunktional (19) gegenüber einer infinitesimalen Umeichung (28). Diesmal richten wir uns nicht nach der formalen Beweislinie aus Abschnitt 4.1.3, sondern betrachten, wie die Reihenentwicklung der 1-Loop-Wechselwirkungen in den Feldvariablen A^μ, ϕ_ν variiert:

$$\begin{aligned} \delta S_{eff} = & \frac{\Lambda^2}{(4\pi)^2} \int d^4x \left\{ 2\text{tr}_I(\phi_\mu \partial^\mu M) \right. \\ & \left. - (4\pi)^2 \cdot i\text{Tr}_{I,D} ([\phi_\tau \gamma^\tau, M] \langle 0 | T \tilde{\chi}(x_+) \bar{\chi}(x_-) | 0 \rangle) \right\} \\ & - i \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \text{Tr} \left\{ \frac{1}{(i\vec{\partial} - m)} (\delta U - i[U, M]) \cdot \left\{ \frac{1}{(i\vec{\partial} - m)} (A - U) \right\}^n \right\} \\ & U = -\Lambda^2 \phi_\tau \gamma^\tau \underline{\underline{h}}_{\underline{\underline{\xi}}} \left(\frac{\vec{\xi}}{2} \right) \\ & \delta A_\mu := i[A_\mu, M] + \partial_\mu M, \quad M \in SU(2)\text{-Lie-Algebra} \end{aligned} \quad (6.42)$$

Die Einzelheiten sind in Anhang E.2 wiedergegeben.

Wegen des Tayloroperators $\exp(\xi \cdot \vec{\partial}/2)$ sind die induzierten Wechselwirkungen offenbar nicht eichinvariant, solange $\xi \neq 0$ aufrechterhalten wird:

$$\delta U - i[U, M] = i\Lambda^2 \underline{\underline{h}}_{\underline{\underline{\xi}}} \left(e^{\vec{\xi}\vec{\partial}/2} \phi_\tau \gamma^\tau [e^{\vec{\xi}\vec{\partial}/2}, M] + [e^{\vec{\xi}\vec{\partial}/2}, M] \phi_\tau \gamma^\tau e^{\vec{\xi}\vec{\partial}/2} \right) \quad (6.43)$$

Wir entnehmen jedoch dem Matrixelement

$$\begin{aligned} \langle p + \frac{q}{2} | [e^{\xi \overline{\partial}} / 2, M] | p - \frac{q}{2} \rangle &= M(q) e^{-i \frac{\xi}{2} p} (e^{-i \frac{\xi}{4} q} - e^{i \frac{\xi}{4} q}) \\ &= \langle p + \frac{q}{2} | [e^{\xi \overline{\partial}} / 2, M] | p - \frac{q}{2} \rangle = M(q) e^{-i \frac{\xi}{2} p} \{-i \frac{\xi}{2} q + o(q)\} \end{aligned} \quad (6.44)$$

daß die Reihenglieder in (42) verschwinden, sobald die ξ -Regularisierung aufgehoben werden darf. Tatsächlich liegt diese Voraussetzung ab $n = 1$ vor — eine Eigenschaft unserer subkanonischen Spinortheorie (vgl. Abschnitt 4.1.2).

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \lim_{\xi \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \dots = \lim_{\xi \rightarrow 0} \text{Tr} \left\{ \frac{-i}{(i \not{\partial} - m)} (\delta U - i[U, M]) \right\} \\ &= \Lambda^2 \cdot \lim_{\xi \rightarrow 0} \text{tr}_{D,I} \left\{ \int \frac{d^4 l}{N} \frac{i e^{-i \xi l}}{(l - M)(-l^2 + \Lambda^2)} \int \frac{d^4 q}{N} (\phi_\tau \gamma^\tau(q) M(-q) \cdot (\xi q) + o(\xi)) \right\} \\ &= -2 \frac{\Lambda^2}{(4\pi)^2} \int d^4 x \text{tr}_I \{ \phi_\mu (\partial^\mu M) \} \end{aligned} \quad (6.45)$$

worin wir Formel (2.74) für den subkanonischen Propagator in der Nähe des Lichtkegels gebrauchen. (45) gleicht die Variation der klassischen $A^\mu \phi_\nu$ -Kontaktwechselwirkung genau aus; nebenbei beseitigen die Dirac- oder Isospinspur auch die Variation des anderen Baumgraphenterms.

$$\Rightarrow \delta S_{eff}(\vec{A}_\mu, \vec{\phi}_\nu) = 0 \quad (6.46)$$

Die lokale $SU(2)$ -Invarianz der Wirkung (19) erleichtert wesentlich die Aufgabe, die Kopplungen zu berechnen, welche den Klassen $I_f^{(g)} (f+g=4, f \geq 1)$ angehören. Es reicht, wenn man konstante äußere Feldvariablen A_μ^i, ϕ_ν^j untersucht. Wir gewinnen dann nacheinander Lagrangedichten

$$\overline{\mathcal{L}}_{A^{4-f} \phi^f} \quad (1 \leq f \leq 4) \quad (6.47)$$

die auf solchen Feynman-Diagrammen mit f äußeren ϕ -Beinen und $(4-f)$ äußeren Beinen des Yang-Mills-Feldes beruhen, bei denen nirgends ein 4-Impuls in die Fermion-Propagatorschleife mündet. Anschließend substituieren wir formal

$$A_\lambda \mapsto A_\lambda - i \partial_\lambda = -i D_\lambda \quad (6.48)$$

wodurch aus $\overline{\mathcal{L}}_{A^{4-f} \phi^f}$ die gesuchte eichinvariante Wechselwirkung

$$\mathcal{L}_f \in I_f^{(4-f)} \quad (1 \leq f \leq 4) \quad (6.49)$$

entsteht. Dieses Verfahren wird im Anhang F.2 näher erläutert. Dort entwerfen wir einen kombinatorischen Beweis für seine Gültigkeit. Obwohl lediglich der reine Yang-Mills-Sektor unter Annahme einer Pauli-Villars-Regularisierung besprochen wird, bereitet es keine große Schwierigkeit, den Multiplikatorfeld-Sektor einzugliedern.

Allerdings muß man sorgfältig prüfen, ob angesichts der nichteichinvarianten Punkttrennungs-Regularisierung (jeder ϕ_ν -Vertex ist mit einem Faktor $\exp(-i \xi l)$ verknüpft, wobei l den Schleifenimpuls bedeutet) die Rekonstruktion der effektiven Wirkung (19) mit Hilfe des Schrittes (48) noch gelingt. Zum Glück beseitigt der zuletzt ausgeführte Grenzübergang $\xi \rightarrow 0$ denkbare Abweichungen; man darf nur nicht vergessen, die Ersetzung (48) auch in der klassischen Kontaktwechselwirkung $\propto \text{tr}(\phi A)$ vorzunehmen.

6.3.2. DIE INDUZIERTE WIRKUNG ZUR SKALENDIMENSION 4

Aus (19) liest man die effektiven Wirkungen ab, die zwischen vier bosonischen Feldern A^μ, ϕ_ν herrschen:

$$S_{eff}^{(4)} = \frac{i}{4} \text{Tr} \left\{ \frac{1}{i\partial - \underline{m}} \left(\mathcal{A} + \Lambda^2 \phi_\tau \gamma^\tau \underline{h}_\varepsilon \right) \right\}^4_{|_{PV}} \quad (6.50)$$

(Nur im reinen Eichfeld-Sektor divergiert die Amplitude.)

Die im vorigen Abschnitt genannten Lagrangedichten $\bar{\mathcal{L}}_{...}$ bei konstantem Yang-Mills- und Multiplikatorfeld lauten offenbar:

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}_{A^3\phi} &= \text{tr}_I(A_\alpha A_\beta A_\gamma \phi_\delta) \sigma^{\alpha\beta\gamma\delta} \quad \text{mit} \\ \sigma^{\alpha\beta\gamma\delta} &= i\Lambda^2 \int \frac{d^4 l}{N} \sum_A \bar{\ell}_A \text{tr}_D \left(\mathcal{D}(l; m_A) \gamma^\alpha \mathcal{D}(l; m_A) \gamma^\beta \mathcal{D}(l; m_A) \gamma^\gamma \mathcal{D}(l; m_A) \gamma^\delta \right) \end{aligned} \quad (6.51)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}_{A^2\phi^2} &= 1 \cdot \text{tr}_I(A_\alpha A_\beta \phi_\gamma \phi_\delta) G^{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{1}{2} \text{tr}_I(A_\alpha \phi_\gamma A_\beta \phi_\delta) \cdot H^{\alpha\beta\gamma\delta} \quad \text{mit} \\ G^{\alpha\beta\gamma\delta} &= i\Lambda^4 \int \frac{d^4 l}{N} \sum_A \bar{\ell}_A \text{tr}_D \left(\mathcal{D}(l; m_A) \gamma^\alpha \mathcal{D}(l; m_A) \gamma^\beta \cdot \mathcal{D}(l; m_A) \gamma^\gamma \mathcal{D}_3(l) \gamma^\delta \right) \\ H^{\alpha\beta\gamma\delta} &= i\Lambda^4 \int \frac{d^4 l}{N} \sum_{A,B} \bar{\ell}_A \bar{\ell}_B \text{tr}_D \left(\mathcal{D}(l; m_A) \gamma^\alpha \mathcal{D}(l; m_A) \gamma^\gamma \cdot \mathcal{D}(l; m_B) \gamma^\beta \mathcal{D}(l; m_B) \gamma^\delta \right) \end{aligned} \quad (6.52)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}_{A\phi^3} &= \text{tr}_I(A_\alpha \phi_\beta \phi_\gamma \phi_\delta) F^{\alpha\beta\gamma\delta} \\ F^{\alpha\beta\gamma\delta} &= i\Lambda^6 \int \frac{d^4 l}{N} \sum_A \bar{\ell}_A \text{tr}_D \left(\mathcal{D}(l; m_A) \gamma^\alpha \mathcal{D}(l; m_A) \gamma^\beta \mathcal{D}_3(l) \gamma^\gamma \mathcal{D}_3(l) \gamma^\delta \right) \end{aligned} \quad (6.53)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}_{\phi^4} &= \frac{1}{4} \text{tr}_I(\phi_\alpha \phi_\beta \phi_\gamma \phi_\delta) \cdot E^{\alpha\beta\gamma\delta} \\ E^{\alpha\beta\gamma\delta} &= i\Lambda^8 \int \frac{d^4 l}{N} \text{tr}_D \left(\mathcal{D}_3(l) \gamma^\alpha \mathcal{D}_3(l) \gamma^\beta \mathcal{D}_3(l) \gamma^\gamma \mathcal{D}_3(l) \gamma^\delta \right) \end{aligned} \quad (6.54)$$

Der Dirac-Propagator und der subkanonische Propagator wurden abgekürzt:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(l; m_A) &:= \frac{1}{l - m_A} \\ \mathcal{D}_3(l) &:= \frac{1}{(l - M)(\Lambda^2 - l^2)} \end{aligned} \quad (6.55)$$

Wir setzen außerdem

$$w = (4\pi)^{-2} \quad (6.56)$$

Die dimensionsfreien 4-stufigen Koeffizienten-Tensoren σ, G, H, F, E sind notwendig reelle Linearkombinationen der Produkte

$$Q = \eta^{\alpha\beta} \eta^{\gamma\delta}, \quad R = \eta^{\alpha\delta} \eta^{\beta\gamma}, \quad S = \eta^{\alpha\gamma} \eta^{\beta\delta} \quad (6.57)$$

Als Vorfaktoren tauchen Polynome in $\varrho = \frac{M^2}{\Lambda^2}$ auf, die manchmal mit $\epsilon = \ln(\frac{1}{\varrho})$ multipliziert sind; dabei halten wir uns an das Massenspektrum (2.49) (vgl. [2]) und die Spektralbedingungen (2.40).

Der Tensor σ folgt bereits aus (37), wenn man die gewichtete Summe $\bar{R}_B(0)$ (siehe (27)) mit dem Spektrum $m_A \in \{M, \Lambda, -\Lambda\}$ und den Gewichten $\check{\varrho}_A$ (vgl. (2.50)) bildet: Es ist unbedeutend, daß wegen $\sum_A \check{\varrho}_A m_A^2 = -1$ die PV-Bedingung für das zweite Moment hier nicht erfüllt ist:

$$\sigma^{\alpha\beta\gamma\delta} = (-2S + Q + R) \cdot \frac{4}{3} w(-\zeta\epsilon) \quad (6.58)$$

$$\Rightarrow \bar{\mathcal{L}}_{A^3\phi} = \frac{4}{3} w(\zeta\epsilon) \text{tr}_I \left([A_\alpha, A_\beta] \cdot [A^\alpha, \phi^\beta] \right) \quad (6.59)$$

Die 1-Loop-Wechselwirkung, welche durch $\bar{\mathcal{L}}_{A^2\phi^2}$ (vgl. (52)) beschrieben wird, geht aus zwei topologisch verschiedenen Feynman-Diagrammen hervor. Die entsprechenden Amplituden wurden G bzw. H genannt. Folgende Symmetrierelationen stehen bereit:

$$\begin{aligned} G^{\alpha\beta\gamma\delta} &= G^{\beta\alpha\delta\gamma} \\ H^{\alpha\beta\gamma\delta} &= H^{\beta\alpha\delta\gamma} = H^{\alpha\beta\delta\gamma} = H^{\beta\alpha\gamma\delta} \end{aligned} \quad (6.60)$$

Man erhält sie aus der zyklischen Eigenschaft der Spur bzw. durch Herstellen der ladungskonjugierten Amplitude (vgl. Anhang C.1).

Die Eichinvarianz läßt hoffen, daß G und H enger zusammenhängen; in der Tat:

$$\begin{aligned} G^{\alpha\beta\gamma\delta} &= i\Lambda^4 \frac{\partial}{\partial p^\alpha} \int \frac{d^4 l}{N} \sum_A \check{\varrho}_A \text{tr}_D \left\{ \mathcal{D}(l-p; m_A) \gamma^\beta \mathcal{D}(l; m_A) \gamma^\gamma \mathcal{D}_3(l) \gamma^\delta \right\} \Big|_{p=0} \\ &= i\Lambda^4 \frac{\partial}{\partial p^\alpha} \int \frac{d^4 l}{N} \sum_A \check{\varrho}_A \text{tr}_D \left(\mathcal{D}(l; m_A) \gamma^\beta \mathcal{D}(l+p; m_A) \gamma^\gamma \mathcal{D}_3(l+p) \gamma^\delta \right) \Big|_{p=0} \\ &= -G^{\beta\alpha\gamma\delta} - H^{\beta\alpha\gamma\delta} \end{aligned} \quad (6.61)$$

$$\Rightarrow \bar{\mathcal{L}}_{A^2\phi^2} = -\frac{1}{2} \text{tr}_I ([A_\alpha, \phi_\beta] \cdot [A_\gamma, \phi_\delta]) G^{\alpha\gamma\delta\beta} \quad (6.62)$$

Da der G -Integrand Propagatoren zu verschiedenen Massen $\in \{M, \pm\Lambda\}$ besitzt, ist der Aufwand für die Schleifenimpuls-Integration diesmal wesentlich höher als im reinen Eichsektor. Wie sonst auch rationalisieren wir die vier Propagatorenenner, reduzieren die Spurterme aus bis zu acht Dirac-Matrizen und erledigen die Raumwinkelintegration, nachdem mit der Wick-Drehung $l^0 \mapsto i l^4$ eine positiv definite Metrik entstanden ist. Die verbleibenden eindimensionalen Integrale

$$\begin{aligned} G_{\alpha,\beta}^\gamma &= \int_0^\infty dx \frac{x^\gamma (M^2)^{\alpha+\beta-\gamma-1}}{(x+M^2)^\alpha (x+\Lambda^2)^\beta} \\ &\quad (\alpha+\beta-\gamma > 1) \end{aligned} \quad (6.63)$$

werden im Anhang D.2 ausführlich behandelt.

Wir können damit schreiben:

$$G^{\alpha\beta\gamma\delta} = -4w\zeta\varrho^{-1} \left\{ \frac{1}{3}(Q+R-2S)(G_{4,1}^3 - G_{1,4}^3) + (Q+R-2S)G_{4,1}^2 \right. \\ \left. + (S-Q) \cdot \varrho^{-1} G_{1,4}^2 + (S-R)G_{1,4}^2 + (Q+R-S) \cdot (G_{4,1}^1 - \frac{1}{\varrho} G_{1,4}^1) \right\} \quad (6.64)$$

Nach mehreren Partialbruchzerlegungen (D.10) können wir die Koeffizienten durch Integrale des Typs $G_{\alpha,\beta}^0(\alpha, \beta \leq 4)$ ersetzen, die schon in (D.23), (D.24) tabelliert sind:

$$G^{\alpha\beta\gamma\delta} = w \cdot \left\{ Q \cdot b_{\phi\phi} + S \cdot c_{\phi\phi} + (S-R) \cdot t \right\} \\ t = \frac{4}{3}\zeta^4 \left(\epsilon\zeta[1, -3, 6, -2] + \frac{1}{6}[-4, 5, -22, 9] \right) \quad (6.65)$$

Die Polynom-Notation (D.22) wurde auch in (26) benutzt, um die Koeffizienten $b_{\phi\phi}, c_{\phi\phi}$ auszudrücken.

$$\Rightarrow \quad \bar{\mathcal{L}}_{A^2\phi^2} = -\frac{w}{2} \text{tr}_I \left\{ b_{\phi\phi}[A_\alpha, \phi_\beta][A^\alpha, \phi^\beta] \right. \\ \left. + c_{\phi\phi}[A_\alpha, \phi_\beta] \cdot [A^\beta, \phi^\alpha] \right. \\ \left. - t \cdot [A_\alpha, A_\beta] \cdot [\phi^\alpha, \phi^\beta] \right\} \quad (6.66)$$

Ähnlich erarbeiten wir $\bar{\mathcal{L}}_{A\phi^3}$. Die Amplitude F dieser Wechselwirkung wurde in (53) vorgestellt. Die Ward-Identität niedrigster Ordnung, welche am Yang-Mills-Vertex besteht, verhilft uns zu folgender Symmetriebeziehung:

$$F^{\alpha\beta\gamma\delta} = i\Lambda^6 \frac{\partial}{\partial p^\alpha} \int \frac{d^4 l}{N} \text{tr}_D \left\{ \mathcal{D}_3(l-p) \gamma^\beta \mathcal{D}_3(l) \gamma^\gamma \mathcal{D}_3(l) \gamma^\delta \right\} \Big|_{p=0} \\ = i\Lambda^6 \frac{\partial}{\partial p^\alpha} \int \frac{d^4 l}{N} \sum_{B,C} \tilde{e}_B \tilde{e}_C \text{tr}_D \left\{ \mathcal{D}_3(l) \gamma^\beta \mathcal{D}(l+p; m_B) \gamma^\gamma \right. \\ \left. \cdot \mathcal{D}(l+p; m_C) \gamma^\delta \right\} \Big|_{p=0} = -F^{\alpha\gamma\delta\beta} - F^{\alpha\delta\beta\gamma} \quad (6.67)$$

Ohne daß wir F explizit kennen, finden wir bereits

$$\bar{\mathcal{L}}_{A\phi^3} = \text{tr}_I(A_\alpha \phi_\beta \phi_\gamma \phi_\delta) \cdot \frac{2F^{\alpha\beta\gamma\delta} - F^{\alpha\gamma\delta\beta} - F^{\alpha\delta\beta\gamma}}{3} \\ = \frac{1}{3} \text{tr}_I \{ [A_\alpha, \phi_\beta] \cdot [\phi_\gamma, \phi_\delta] \} \cdot F^{\alpha\beta\gamma\delta} \quad (6.68)$$

Wir verwenden darin noch, daß eine Ladungskonjugation der Vertizes, Propagatoren in F die weitere Symmetrie

$$F^{\alpha\beta\gamma\delta} = F^{\alpha\delta\gamma\beta} \quad (6.69)$$

liefert.

Die Feynman-Amplitude wird in der oben beschriebenen Weise berechnet. Algebraische Umformungen führen auf

$$F^{\alpha\beta\gamma\delta} = \varrho^{-3} \cdot w \left\{ (R + Q + S) \cdot \left\{ \frac{2}{3} G_{3,4}^3 + 2G_{3,4}^2 \right\} \right. \\ \left. + (R + Q - 2S) \cdot \left\{ -\frac{4}{3} G_{4,3}^3 - 4G_{4,3}^2 \right\} \right. \\ \left. + (R + Q - S) \cdot \left\{ -4G_{4,3}^1 \right\} \right\} \quad (6.70)$$

$\Rightarrow$ (vgl. Anhang D.2):

$$\bar{\mathcal{L}}_{A\phi^3} = \frac{4}{3} w \cdot u \operatorname{tr}_I \left\{ [A_\alpha, \phi_\beta] \cdot [\phi^\alpha, \phi^\beta] \right\} \\ \text{mit } u = \varrho^{-3} (G_{4,3}^3 + 3G_{4,3}^2 + 2G_{4,3}^1) \\ = \zeta^5 (\epsilon\zeta[1, -3, -3, 5] + [-2, 9, -6, -1]) \quad (6.71)$$

Endlich beschafft man sich die 1-Loop-induzierte Wechselwirkung von vier Multiplikatorfeldern ϕ_ρ ; deren Amplitude E (siehe (54)) wird:

$$E^{\alpha\beta\gamma\delta} = 4w ((2S - Q - R) \cdot v_1 + S \cdot v_2) \\ v_1 = \frac{1}{3} \varrho^{-4} (G_{4,4}^3 + 3G_{4,4}^2 + 3G_{4,4}^1) \\ v_2 = -\varrho^{-4} \cdot G_{4,4}^1 \quad (6.72)$$

$$\Rightarrow \bar{\mathcal{L}}_{\phi^4} = w \left(v_1 \operatorname{tr}_I \left\{ [\phi_\alpha, \phi_\beta] \cdot [\phi^\alpha, \phi^\beta] \right\} + v_2 \operatorname{tr}_I \left\{ \phi_\alpha \phi_\beta \phi_\alpha \phi_\beta \right\} \right) \\ \text{mit } v_1 = \frac{1}{3} \zeta^6 \left\{ \epsilon\zeta[1, -3, 3, 19] + \frac{1}{6} [-13, 56, -130, -36, 3] \right\} \\ v_2 = \zeta^6 \left\{ \epsilon\zeta[0, 0, -10, -10] + \frac{1}{6} \cdot [-1, 14, 94, 14, -1] \right\} \quad (6.73)$$

Nun befreien wir uns von der bisher geltenden Annahme, daß A^μ und ϕ_ν konstante Feldkonfigurationen darstellen. Dies geschieht mit Hilfe der Substitution (48); die eichinvarianten Lagrangedichten $\mathcal{L}_f$ (49) der Skalendimension 4 mit f Faktoren des Multiplikatorfeldes werden so gewonnen:

(59) $\Rightarrow$:

$$\mathcal{L}_1 = -w \cdot \frac{4}{3} (\zeta\epsilon) \operatorname{tr}_I \left\{ F_{\alpha\beta} [D^\alpha, \phi^\beta] \right\} \quad (6.74)$$

(66) $\Rightarrow$:

$$\mathcal{L}_2 = \frac{w}{2} \operatorname{tr}_I \left\{ b_{\phi\phi} [D_\alpha, \phi_\beta] [D^\alpha, \phi^\beta] + c_{\phi\phi} [D_\alpha, \phi_\beta] [D^\beta, \phi^\alpha] - it [\phi^\alpha, \phi^\beta] F_{\alpha\beta} \right\} \quad (6.75)$$

(71) $\Rightarrow$:

$$\mathcal{L}_3 = -\frac{4}{3} iw \operatorname{tr}_I \left\{ u [D_\alpha, \phi_\beta] \cdot [\phi^\alpha, \phi^\beta] \right\} \quad (6.76)$$

(73) enthält kein Yang–Mills–Feld; der Vollständigkeit halber wiederholen wir diese Gleichung noch einmal:

$$\mathcal{L}_4 = w \operatorname{tr}_1 \left\{ v_1 [\phi_\alpha, \phi_\beta] \cdot [\phi^\alpha, \phi^\beta] + v_2 \phi_\alpha \phi_\beta \phi_\alpha \phi_\beta \right\} \quad (6.77)$$

Der Kommutator

$$[D_\alpha, \phi_\beta] := \partial_\alpha \phi_\beta + i \cdot [A_\alpha, \phi_\beta] \quad (6.78)$$

steht für die kovariante Ableitung des Feldes ϕ_β , das der adjungierten $SU(2)$ -Darstellung angehört. Die kinetischen Terme in $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ treten schon in der bilinearen Näherung (23) auf.

6.4. AUSGEPRÄGTE HIERARCHIE DER BEIDEN MASSENSKALEN M, Λ

6.4.1. SUBKANONISCHE PROPAGATORKETTEN MIT ϕ_ν -VERTIZES AN BEIDEN ENDEN

Wir betrachten 1-Schleifen-Diagramme, welche zur effektiven Wirkung (19) beitragen. Der Amplitudenteil $\mathcal{K}$ zwischen aufeinanderfolgenden Vertizes des Multiplikatorfeldes ϕ_ν hat die allgemeine Form

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \Lambda^2 \sum_A \check{e}_A \mathcal{D}_A^{(1)} \mathcal{D}_A^{(2)} \dots \mathcal{D}_A^{(n)} \quad (n \geq 1) \\ \mathcal{D}_A^{(k)} &= \mathcal{D}(p_{(k)}; m_A) \gamma^{\mu_k} \end{aligned} \quad (6.79)$$

Die Indizes $\mu_1, \dots, \mu_{n-1}$ in dieser Propagatorkette verweisen auf die Komponenten äußerer Yang–Mills–Feldvariablen $A^{\mu_k}(p_{(k)})$, welche Werte aus der $SU(2)$ -Lie-Algebra annehmen. Die Dirac-Matrix des ϕ_{μ_n} -Vertex wird ebenfalls in $\mathcal{K}$ aufgenommen. Außerdem wurde die Flavour-Matrix, welche an jedem Multiplikatorvertex sitzt, gemäß

$$\underline{h} \cdot \Lambda^2 = (v \cdot \Lambda) \cdot (v \cdot \Lambda)^T$$

(vgl. (4.10)) faktorisiert; der Spaltenvektor $(v \cdot \Lambda)$ (Zeilenvektor $(v^T \cdot \Lambda)$) sollen der vorübergehenden (nachfolgenden) Propagatorkette angehören. Die so entstandene gewichtete Spektralsumme (79) ist natürlich eine Folge der verwendeten subkanonischen Spinortheorie (2.51a).

Die Spektralbedingungen (2.40) verbessern den oberflächlichen Divergenzgrad $D = -n$ der Kette $\mathcal{K}$ um zwei Einheiten; Abschnitt 4.1.2 enthält dieses Ergebnis. Jetzt versuchen wir, $\mathcal{K}$ als Linearkombination von anderen Ketten $\mathcal{K}'$ wiederzugeben, die sämtlich bereits den Divergenzgrad $(-n - 2)$ besitzen. Die bekannte Identität

$$\sum_A \check{e}_A \mathcal{D}_A^{(i)} = \mathcal{D}_3^{(i)} := \frac{1}{(\not{p}_{(i)} - M)(\Lambda^2 - p_{(i)}^2)} \gamma^{\mu_i} \quad (6.80)$$

für den subkanonischen Propagator ermöglicht die Zerlegung

$$\mathcal{K} = \Lambda^2 \mathcal{D}_3^{(1)} \prod_{i=2}^n \mathcal{D}_M^{(i)} + \check{e}_\Lambda \mathcal{D}_\Lambda^{(1)} \left\{ \prod_{i=2}^n \mathcal{D}_\Lambda^{(i)} - \prod_{i=2}^n \mathcal{D}_M^{(i)} \right\} + \check{e}_{-\Lambda} \mathcal{D}_{-\Lambda}^{(1)} \left\{ \prod_{i=2}^n \mathcal{D}_{-\Lambda}^{(i)} - \prod_{i=2}^n \mathcal{D}_M^{(i)} \right\} \quad (6.81)$$

Wegen

$$\prod_{i=1}^n a_i - \prod_{i=1}^n b_i = \sum_{i=1}^m \left(\prod_{k=1}^{i-1} b_k (a_i - b_i) \prod_{l=i+1}^m a_l \right) \quad (6.82)$$

und

$$\tilde{e}_{\pm\Lambda} \left(-\mathcal{D}_{\pm\Lambda}^{(j)} + \mathcal{D}_M^{(j)} \right) = \pm \frac{1}{2\Lambda} \cdot \frac{1}{(\not{p}_{(j)} \mp \Lambda)(\not{p}_{(j)} - M)} \gamma^{\mu_j} \equiv \pm \frac{1}{2\Lambda} \mathcal{D}_{2\pm}^{(j)} \quad (6.83)$$

können schon überall Terme gewonnen werden, deren Divergenzgrad höchstens $(-n-1)$ beträgt:

$$\kappa = \Lambda^2 \left(\mathcal{D}_3^{(1)} \prod_{i=2}^n \mathcal{D}_M^{(i)} - \frac{1}{2\Lambda} \sum_{\sigma=2}^n \left(\prod_{s=1}^{\sigma-1} \mathcal{D}_{\Lambda}^{(s)} \mathcal{D}_{2+}^{(\sigma)} - \prod_{s=1}^{\sigma-1} \mathcal{D}_{-\Lambda}^{(s)} \mathcal{D}_{2-}^{(\sigma)} \right) \cdot \prod_{t=\sigma+1}^n \mathcal{D}_M^{(t)} \right) \quad (6.84)$$

Zuletzt erreichen wir mit Hilfe von

$$\frac{1}{2\Lambda} \left(-\mathcal{D}_{\Lambda}^{(j)} + \mathcal{D}_{-\Lambda}^{(j)} \right) = \frac{1}{-\not{p}_{(j)}^2 + \Lambda^2} = \mathcal{D}_{2\Lambda}^{(j)} \quad (6.85)$$

und (82), daß alle Summanden den Divergenzgrad $(-n-2)$ erhalten:

$$\begin{aligned} \kappa = \Lambda^2 \cdot & \left(\mathcal{D}_3^{(1)} \prod_{i=2}^n \mathcal{D}_M^{(i)} \right. \\ & + \sum_{\sigma=2}^n \left\{ \sum_{\tau=1}^{\sigma-1} \prod_{\lambda=1}^{\tau-1} \mathcal{D}_{-\Lambda}^{(\lambda)} \mathcal{D}_{2\Lambda}^{(\tau)} \cdot \prod_{\lambda=\tau+1}^{\sigma-1} \mathcal{D}_{\Lambda}^{(\lambda)} \mathcal{D}_{2+}^{(\sigma)} + \prod_{\tau=1}^{\sigma-1} \mathcal{D}_{-\Lambda}^{(\tau)} \mathcal{D}_3^{(\sigma)} \right\} \cdot \prod_{t=\sigma+1}^n \mathcal{D}_M^{(t)} \Big) \end{aligned} \quad (6.86)$$

Lediglich der Anfangsterm in der eben gefundenen Zerlegung besitzt weniger als drei Linearfaktoren $\in \left\{ \frac{1}{\not{p}_{(i)} \mp \Lambda} \right\}$. Deshalb gilt asymptotisch:

$$\kappa \xrightarrow[\text{M fest}]{\varrho \rightarrow 0} \prod_{i=1}^n \mathcal{D}_M^{(i)} \frac{1}{1 - \left(\frac{\not{p}_{(i)}^2}{\Lambda^2} \right)} \quad (\not{p}^{\mu(i)} \text{ in einem kompakten Hypervolumen}) \quad (6.87)$$

6.4.2. DIE EFFEKTIVE WIRKUNG IM ASYMPTOTISCHEN GRENZFALL

Der reine Eichsektor $\mathcal{S}_{eff}(\phi_\nu \equiv 0)$ kann die Verbesserung der Konvergenz im Falle von Propagatorketten (79) nicht nutzen. Seine Regularisierung erfolgt nach der Methode von Pauli und Villars. Sonst divergieren wegen (86) nur noch die beiden Amplituden, welche über genau einen Multiplikatorvertex ($f = 1$) sowie (k)einen Yang-Mills-Vertex ($a = 0, a = 1$) verfügen. Hier hält man sich an die Punkttrennungs-Regularisierung, der es gelingt, die klassische Kontaktwechselwirkung $\propto \phi \cdot A$ zu beseitigen.

Andere Wechselwirkungen ($f = 1 \wedge a > 1$ oder $f > 1 \wedge a \in \mathbb{N}_0$) gehen aus konvergenten 1-Schleifen-Amplituden hervor, selbst wenn man die ξ -Punkttrennung aufhebt. Wir besprechen die führenden Beiträge, falls das Massenverhältnis $\varrho = M^2/\Lambda^2$ gegen 0 strebt und die niedrigere Skala M festgehalten wird.

Die Skalendimension E der Kopplungen setzt sich wie folgt zusammen:

$$E = a + f + d \quad (6.88)$$

d bezeichnet darin die Zahl der partiellen Ableitungen. Eine solche Amplitude $\mathcal{A}^{(a;f;d)}$ wird aus f Propagatorketten der Form (86) gebildet, wobei eine Taylorentwicklung der Propagatorfaktoren $D_A^{(i)}$ nach wachsenden Potenzen der äußeren Impulsvariablen $q^{(k)}$ uns gestattet, die gesuchten Ausdrücke vom Grad d in $q^{(k)}$ sofort zu entnehmen. Nachdem man die Nenner rational erweitert und die Clifford-Algebra zur Berechnung der Dirac-Spur eingesetzt hat, kann man durch eine Wick-Drehung der 0-Komponente des Schleifenimpulses l zu einer euklidischen Metrik übergehen. Damit wird das Raumwinkelintegral $\int d\Omega_{(\vec{l})}$ wie im Anhang D.1 beschrieben gewonnen. Es fehlt nur noch die Berechnung ein-dimensionaler Integrale von der Art

$$R_{\sigma,\tau}^{s,t,f}(\Lambda) = \int_0^\infty dx \cdot x \frac{x^{\frac{\sigma}{2}} M^{s-\sigma} x^{\frac{\tau}{2}} \Lambda^{t-\tau} (\Lambda^2)^f}{D_M^s \cdot D_\Lambda^t} \quad (6.89)$$

$$\left(\begin{array}{ll} 0 \leq \sigma \leq s; & 0 \leq \tau \leq t \\ \sigma, \tau, s, t \in \mathbb{N}_0; & D_\mu = x + \mu^2 \end{array} \right)$$

Wir erkennen also, daß $\mathcal{A}^{(a;f;d)}$ als eine Linearkombination verschiedener $(a + f + d)$ -stufiger Lorentztensoren darstellbar ist, deren Koeffizienten gerade die Radialintegrale $R_{\sim}(\Lambda)$ sind. Weil diese Tensoren nur aus Produkten der Metrik und der äußeren Impulsvektoren aufgebaut sind, gilt unsere Aufmerksamkeit ganz den Ausdrücken (89), wenn wir den Grenzfall $\Lambda \rightarrow \infty$ betrachten.

Schließlich wird $\mathcal{A}^{(a;f;d)}$ mit den a äußeren Potentialen A^μ und f Multiplikatorfeldern ϕ_ν verjüngt, um die dimensionsfreie effektive Wechselwirkung zu erhalten; deshalb muß die Beziehung

$$0 = a + f + d + (-s - t + 2f) \quad (6.90)$$

gelten. Wir nahmen zusätzlich an, daß die uneigentlichen Integrale (89) konvergieren.

$$\Rightarrow s + t - \frac{\sigma}{2} - \frac{\tau}{2} > 2 \quad (6.91)$$

Jeder Term der Zerlegung (86) besitzt mindestens zwei Linearfaktoren $\in \{\frac{1}{p_{(i)} \mp \Lambda}\}$; daher können wir uns auf die Nebenbedingung

$$t \geq 2f \quad (6.92)$$

verlassen.

Es empfiehlt sich, den Integranden aus (89) in $\{f_\Lambda(x) \cdot g_\Lambda(x)\}$ zu faktorisieren, wozu wir

$$f_\Lambda = \frac{M^{s-\sigma} x^{\frac{\sigma}{2}} \cdot x}{D_M^s} \cdot \frac{1}{D_\Lambda^{\frac{t}{2}-f}} \quad (6.93)$$

und

$$g_\Lambda = \left(\frac{x}{D_\Lambda}\right)^{\frac{\tau}{2}} \cdot \left(\frac{\Lambda^2}{D_\Lambda}\right)^{f+\frac{1}{2}(t-\tau)} \quad (6.94)$$

definieren. $g_\Lambda(x)$ hat 1 als obere Schranke, gleichgültig welcher Massenparameter Λ gewählt wurde.

$f_\Lambda(x)$ besitzt die Majorante

$$\hat{f}(x) = \frac{M^{s-\sigma} \cdot x^{\frac{\sigma}{2}} \cdot x}{D_M^{s+\frac{1}{2}t-f}}$$

sobald $\Lambda > M$ vorliegt. Außerdem ist $\hat{f}(x)$ integrierbar, wenn

$$s - \frac{\sigma}{2} + \frac{t}{2} - f > 2 \quad \Leftrightarrow \quad (s - \sigma) + E > 4 \quad (6.95)$$

zutrifft; damit sind die Voraussetzungen erfüllt, um ein Theorem von Lebesgue zu benutzen, wonach $\lim_{\Lambda \rightarrow \infty}$ mit der Integration in (89) vertauscht:

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} R_{\sigma, \tau}^{s, t, f}(\Lambda) = \begin{cases} \int_0^\infty \frac{dx \, x M^{s-\sigma} x^{\frac{\sigma}{2}}}{D_M^s}, & \text{falls } t = 2f \wedge \tau = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.96)$$

Wegen (95) darf diese Vertauschung von Grenzprozessen insbesondere für alle Wechselwirkungen stattfinden, deren Skalendimension E den Wert 4 überschreitet. Die Propagator-Kette (86) wird dann durch

$$\mathcal{K} = \prod_{i=1}^n D_M^{(i)} \quad (6.97)$$

ersetzt (benutze (87)).

Wir konnten also nachweisen, daß diese effektiven Kopplungen aus dem Funktional

$$\hat{S}_{eff} \equiv -i \operatorname{Tr} \ln(i\hat{\mathcal{D}} - \hat{\mathcal{A}} - m - \phi_\tau \gamma^\tau)_{|E>4} \quad (6.98)$$

stammen. Im asymptotischen Grenzfall $\Lambda \rightarrow \infty$ ermöglicht die Substitution

$$A_\mu \mapsto B_\mu := A_\mu + \phi_\mu \quad (6.99)$$

der $SU(2)$ -Konnektion, die für den reinen Eichfeldsektor gefundene Wechselwirkung mit $E = 6$ (vgl. (39)) um die entsprechenden Kopplungen des Multiplikatorfelds zu erweitern.

Anstelle des Yang-Mills-Feldstärkentensors $F_{\mu\nu}$ erscheint jetzt

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu + i[B_\mu, B_\nu] \\ &= F_{\mu\nu} + [D_\mu, \phi_\nu] - [D_\nu, \phi_\mu] + i[\phi_\mu, \phi_\nu] \end{aligned} \quad (6.100)$$

Wir beherrschen in dieser Untersuchung noch nicht die Fälle $E < 4$, welche die Bedingung (95) vielleicht verletzen. Es kommt uns daher sehr gelegen, daß die ausstehenden induzierten Wechselwirkungen schon Gegenstand von Abschnitt 6.3.2 waren; dort wurde die Berechnung von $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3, \mathcal{L}_4$ für ein beliebiges Massenspektrum $\{M, \Lambda\}$ erledigt (vgl. (74—77)).

Im Grenzfall $\varrho \rightarrow 0$ (M fest) erhält man sofort die führenden Beiträge:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{L}_1}{w} &\xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} -\frac{4}{3}\epsilon \operatorname{tr}_1\{F_{\alpha\beta}[D^\alpha, \phi^\beta]\} \\
\frac{\mathcal{L}_2}{w} &\xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} -\frac{2}{3}\epsilon \operatorname{tr}_1\{[D_\alpha, \phi_\beta] \cdot [D^\alpha, \phi^\beta] - [D_\alpha, \phi_\beta] \cdot [D^\beta, \phi^\alpha] + i[\phi^\alpha, \phi^\beta]F_{\alpha\beta}\} \\
\frac{\mathcal{L}_3}{w} &\xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} -\frac{4}{3}\epsilon \operatorname{tr}_1\{i[D_\alpha, \phi_\beta] \cdot [\phi^\alpha, \phi^\beta]\} \\
\frac{\mathcal{L}_4}{w} &\xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{3}\epsilon \operatorname{tr}_1\{[\phi_\alpha, \phi_\beta] \cdot [\phi^\alpha, \phi^\beta]\}
\end{aligned} \tag{6.101}$$

Wir geben nun sämtliche 1-Schleifen-Wechselwirkungen der Skalendimensionen $E = 2, 4$ gemeinsam wieder (vgl. (23), (26), (31), (38)):

$$\begin{aligned}
S_{eff|E \leq 4} &\xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} w \cdot \int d^4x \operatorname{tr}_1 \left\{ -\Lambda^2 \phi_\mu \phi^\mu - \frac{1}{2} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} \cdot \frac{2\epsilon}{3} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} (-\bar{R}_M(0) \cdot \frac{2}{3} - \frac{2\epsilon}{3}) \right\}
\end{aligned} \tag{6.102}$$

Es wird deutlich, daß die Massenskala Λ jetzt dieselbe Bedeutung annimmt wie der Pauli-Villars-Regulator $\bar{\Lambda}$ (siehe (4.28)). Die hier gewählte subkanonische Spinortheorie für ein Punkttrennungsregularisiertes Verbundfeld A^μ kann daher auch als Fermion-Modell mit einer von Beginn an wirksamen impliziten PV-Regularisierung verstanden werden, soweit es sich um die induzierten 1-Loop-Kopplungen handelt. Nur der Multiplikator-Massenterm fügt sich dieser Deutung nicht.

Wir kehren nochmals zurück nach (89), um einen Hinweis zu finden, weshalb sich die Kopplungen der Skalendimension $E = 4$ auf so einfache Art (vgl. (102)) neu anordnen lassen. Die Substitution $y = x/\Lambda^2$ ist vorteilhaft:

$$R_{\sigma,\tau}^{s,t,f}(\varrho) = \int_0^\infty \frac{dy y^{\frac{\sigma}{2}+1} \varrho^{\frac{s-\sigma}{2}} y^{\frac{\tau}{2}}}{(y+\varrho)^s \cdot (y+1)^t} \tag{6.103}$$

Das konvergente Teilintegral über das Intervall $[1, \infty)$ (beachte: $s - \sigma/2 + t - \tau/2 - 1 \geq \frac{s+t}{2} - 1 = f + 1 \geq 2$) bleibt endlich, falls ϱ gegen 0 strebt: der Integrand wird nämlich von der integrierbaren Funktion

$$\frac{1}{y^{s-\frac{\sigma}{2}-1}} \cdot \frac{y^{\frac{\tau}{2}}}{(1+y)^t} \Big|_{x \in [1, \infty)}$$

majorisiert. Der Beitrag des Intervalls $[0, 1]$ besitzt die obere Schranke

$$U_{\sigma,\tau}^{s,t,f}(\varrho) = \int_0^1 \frac{dy y^{[\frac{\sigma+1}{2}]+1}}{(y+\varrho)^s} \cdot \varrho^{\frac{s-\sigma}{2}} \cdot 2^{-t} \tag{6.104}$$

(wenn $\tau = 0$, σ ungerade, kommt $R_{\sigma,\tau}^{s,t,f}(\varrho)$ für die 1-Schleifen-Amplitude $\mathcal{A}^{(a,f;d)}$ nicht in Frage, da aus Symmetriegründen $\int d\Omega_{(\bar{1})} \dots$ wegfällt).

Hat man es mit Exponenten $s \in \{0, 1, 2, 3\}$ zu tun, dann nähert sich mit $\varrho \rightarrow 0$ $U_{\sigma,\tau}^{s,t,f}(\varrho)$ einem endlichen Grenzwert.

Wir sehen als Nächstes, daß die führenden $\sim \epsilon$ divergierenden Wechselwirkungsterme (vgl. (101)) nur entstehen können, wenn der einzige bisher ausgelassene Fall $s = 4, t = 2f$ eintritt (siehe (90), (92)). Genauer: $R_{\sigma,\tau}^{4,2f,f}(\varrho)$ divergiert nur dann logarithmisch $\sim \epsilon$, falls der Exponent $\sigma = 4$ eingesetzt wird (sonst ($\sigma \in \{0, 1, 2, 3\}$) treten wieder beschränkte Integrale auf):

$$R_{4,\tau}^{4,2f,f} = \int_0^\infty \frac{dy y^3 \cdot y^{\frac{\tau}{2}}}{(y + \varrho)^4 (y + 1)^{2f}} \quad (\tau \leq 2f, \tau \text{ gerade})$$

$$\xrightarrow{\varrho \rightarrow 0} \begin{cases} \text{const}_1(f, \tau), & \tau > 0 \\ \epsilon + \text{const}_2(f), & \tau = 0 \end{cases} \quad (6.105)$$

Demnach verliert man keinen führenden Term unter den Kopplungen mit Skalendimension $E = 4$, sobald man den asymptotischen Limes (87) anstelle der gesamten Propagatorkette (86) benutzt. Des weiteren dürfen in den f Regularisierungsfaktoren $\frac{1}{1 - (p_{(\omega)}^2/\Lambda^2)}$ die äußeren Impulse gleich Null gesetzt werden ($t = 2f$!): $p_{(\omega)} \mapsto l$; endlich genügt es sogar, genau einen Regularisierungsfaktor

$$\frac{1}{1 - \frac{l^2}{\Lambda^2}} \quad (6.106)$$

zu behalten (vgl. (105)).

$$\Rightarrow \mathcal{S}_{\epsilon ff|E=4} \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} -\frac{1}{2} \int d^4x \text{tr}_I(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})(-\bar{R}_M(0) \cdot \frac{2}{3})$$

$$+ \frac{i}{4} \text{Tr} \left\{ \left(\frac{1}{(i\partial - M)} (\mathcal{A} + \not{n}) \right)^4 \cdot \frac{1}{1 + \frac{\partial^2}{\Lambda^2}} \right\} \Big|_{\eta=0}^{\eta=\phi}$$

$$\xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2} \text{tr}_I(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \cdot \frac{2}{3} (-\bar{R}_M - \frac{3}{2}\omega) - \frac{1}{2} \text{tr}_I(G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}) \cdot \omega \right\}$$

($\omega \in \mathbb{R}$)

denn offensichtlich unterscheidet sich die Auswertung der $E = 4$ -Kopplungen des reinen PV-regularisierten Eichfeldsektors im asymptotischen Grenzfall lediglich um einen konstanten Faktor von der Regularisierungs-Vorschrift (106); und zwar:

$$\frac{\omega}{-\bar{R}_M(0) \cdot \frac{2}{3}} \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{\int_0^\infty \frac{dx}{(x + M^2)(1 + \frac{x}{\Lambda^2})}}{\int_0^\infty \frac{dx}{x + M^2} |_{\text{PV}}} \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{\epsilon}{-\bar{R}_M(0)} \Rightarrow \omega = \frac{2}{3}\epsilon \quad (6.108)$$

Damit bestätigen wir das Ergebnis (102); diesmal jedoch ohne auch nur einer Feynman-Amplitude begegnet zu sein.

7. Ergänzung der effektiven Beschreibung durch Materie-Verbundfelder

7.1. ZUSAMMENGESETZTES SKALARFELD UND DIRACFELD

VERSCHIEDENE ANSÄTZE FÜR DIE BILINEARISIERTE SUBKANONISCHE WIRKUNG

Das subkanonische Spinorfeld $\tilde{\chi}(x)$ diene bisher nur zur Konstruktion eines zusammengesetzten Eichfeldes (siehe etwa (2.80)). Falls das selbstwechselwirkende Spinormodell (2.90b) außerdem noch die Dynamik der anderen, heute noch als elementar geltenden Teilchenfelder wiedergeben soll, die im Standardmodell der elektroschwachen und der starken Wechselwirkung enthalten sind, müssen auch dafür passende Verbundfelder bereitgestellt werden.

Vorschläge für komplexwertige Skalarfelder bzw. ein zusammengesetztes kanonisches Spinorfeld wurden in Arbeiten von Amati et al [3], [4] sowie von Dürr [1] genannt. Aus effektiven 1-Schleifen-Wechselwirkungen, welche das subkanonische Feld $\tilde{\chi}(x)$ vermittelt, gehen wiederum die kinetischen Terme dieser Verbundfelder hervor (vgl. mit (4.59)).

Jedoch versuchen wir hier nicht, eine fundamentale Spinortheorie zu entwerfen, die zumindest die bekannte Produktgruppenstruktur $SU(2) \times U(1) \times SU(3)$ der geeichten Wechselwirkungen des Standardmodells verständlich macht (ohnehin wird ein bezüglich einer Obergruppe eichinvariantes Spinormodell den Ausgangspunkt darstellen; daraus erhält man aber keine Antwort auf die entscheidende Frage, weshalb die Natur die Wechselwirkungen gerade in der $SU(2) \times U(1) \times SU(3)$ -Form verwirklicht hat). Hingegen sollen in diesem Abschnitt die induzierten Kopplungen eines $U(1)$ -Eichfeldes A_μ an geladene Materie-Verbundfelder behandelt werden; dann erfährt man, ob sich der in (4.60) gefundene Wert der effektiven Feinstrukturkonstante α , der die Kopplungsstärke zwischen dem Eichpotential A^μ und den subkanonischen Feldern $\tilde{\chi}, \bar{\tilde{\chi}}$ bedeutet, auch in der Phänomenologie widerspiegelt.

Stellvertretend für die vielen denkbaren Operatorprodukte, wählen wir

- das selbstadjungierte Lorentz-Skalarfeld

$$\varphi = \bar{\tilde{\chi}} \tilde{\chi} \quad (\Rightarrow \varphi^\dagger = \varphi) \quad (7.1)$$

Das Hilfsfeld φ wird nun benutzt, um ein Spinor-Materiefeld ebenfalls bilinear zusammenzusetzen:

$$\bullet \quad \eta = \varphi \cdot \tilde{\chi} \quad (7.2)$$

Auf diese Weise umgehen wir explizit trilineare Produkte des Dirac-Spinors $\tilde{\chi}$, welche eine geschlossene Integration über die fundamentalen Spinormoden im erzeugenden Funktional Z unmöglich machen. Die eben definierten Verbundfelder werden nun in die linearisierte Lagrangedichte (2.96) aufgenommen, so daß die Zwangsbedingungen (1), (2) in der Form klassischer Euler-Lagran-

ge-Gleichungen erscheinen:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eff}^{(M)\varphi\eta} = & \bar{\psi} \{ (i\partial - \underline{A} - \underline{m}) \cdot \underline{\epsilon} \} \psi + \lambda_\mu (A^\mu - 8\pi^2 \bar{\psi}_i \gamma^\mu \psi_j : h_{ij}) \\ & + \mathcal{M}_\varphi \cdot (\varphi - \bar{\chi}\tilde{\chi}) + \overline{\mathcal{M}}_\eta (\eta - \varphi\tilde{\chi}) + (\bar{\eta} - \bar{\chi}\varphi) \cdot \mathcal{M}_\eta \\ & (\tilde{\chi} = \sum_C \sqrt{|\tilde{e}_C|} \cdot \psi_C) \end{aligned} \quad (7.3)$$

Sämtliche Verbundfeld-Konstruktionen werden durch Lagrange-Multiplikatorbedingungen ausgedrückt.^[22] Im Gegensatz zur $U(1)$ -Eichkonnektion A^μ können wir die Materie-Verbundfelder auch einbinden, indem wir die entsprechenden trivialen kinetischen Terme verwenden; damit sind wir nicht mehr auf zusätzliche Multiplikatorfelder angewiesen:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\varphi\eta} = & \bar{\psi} \{ (i\partial - \underline{A} - \underline{m}) \cdot \underline{\epsilon} \} \psi + \lambda_\mu (A^\mu - 8\pi^2 \bar{\psi}_i \gamma^\mu \psi_j : h_{ij}) \\ & + \left\{ \frac{1}{2} \varphi^2 - \varphi \bar{\chi} \tilde{\chi} \right\} \cdot u + (\bar{\eta} - \bar{\chi} \varphi) \cdot (\eta - \varphi \tilde{\chi}) \cdot v \\ & (\dim u = 2, \dim v = 1; u, v \neq 0) \end{aligned} \quad (7.4)$$

Aber es ließ sich nicht umgehen, daß weitere Parameter u, v auftreten: einerseits besitzen alle Terme einer Lagrangedichte die Energiedimension $(+4)$, andererseits sollten höchstens bilineare Produkte des subkanonischen Feldes $\tilde{\chi}$ bzw. der Polfelder ψ_A ($A \in \{M, \Lambda, -\Lambda\}$) vorkommen. Denn die angestrebte geschlossene Form der effektiven Lagrangedichte aller Verbundfelder verlangt einen Gauß-förmigen Integranden $\exp(i \int d^4x \mathcal{L})$ in der Pfadintegral-Darstellung der Greenfunktionen. Des weiteren sind (3) und (4) nicht gleichwertig; nach einer Elimination der Hilfsfelder in (4) erkennt man nämlich, daß sie sich um 4-Spinor-Wechselwirkungen unterscheiden:

$$\mathcal{L}_{\varphi\eta} - \mathcal{L}^{(M)\varphi\eta} = -\frac{1}{2} u \cdot (\bar{\chi} \tilde{\chi}) \cdot (\bar{\chi} \tilde{\chi}) \quad (7.5)$$

7.2. EFFEKTIVE LAGRANGEDICHTEN MIT MATERIEFELDERN

Mit einer Grassmann-Funktionalintegration über die beteiligten Polfelder und deren adjungierte Felder erhalten wir die gesuchten effektiven Lagrangedichten $\mathcal{L}_{eff}^{(M)\varphi\eta}$ in der 1-Schleifen-Näherung gemäß

$$e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{eff}^{(M)\varphi\eta}} = \int \prod_A \mathcal{D}\bar{\psi}_A \prod_B \mathcal{D}\psi_B e^{i \int d^4x \mathcal{L}^{(M)\varphi\eta}}$$

• (3) $\Rightarrow$:

$$\int d^4x \mathcal{L}_{eff}^{(M)\varphi\eta} = -i \text{Tr} \ln \left\{ (i\partial - \underline{A} - \underline{m}) \cdot \underline{\epsilon} - 8\pi^2 \not{\chi} \underline{h} e^{\vec{\epsilon} \vec{\partial} / 2} - \mathcal{M}_\varphi \cdot \underline{h} \right\} \quad (7.6)$$

[22] Für das dem Materie-Verbundfeld v zugeordnete Multiplikatorfeld wird stets die Bezeichnung $\mathcal{M}_v$ (v reell) bzw. $\overline{\mathcal{M}}_v$ (v ein Dirac-Spinor) verwendet. Der Index (M) weist darauf hin, daß wir uns allein auf Multiplikatorbedingungen stützen.

$$\begin{aligned}
& + \int d^4x \left\{ \lambda_\mu A^\mu + \mathcal{M}_\varphi \varphi + \overline{\mathcal{M}}_\eta \eta + \overline{\eta} \mathcal{M}_\eta \right. \\
& - \overline{\mathcal{M}}_\eta \varphi \sqrt{|\tilde{\ell}_A|} \left\{ \frac{1}{(i\partial - \not{A} - \underline{m}) \cdot \underline{\epsilon} - 8\pi^2 \not{\chi} \underline{h} e^{\vec{\xi}\vec{\partial}/2} - \mathcal{M}_\varphi \underline{h}} \right\}_{AB} \sqrt{|\tilde{\ell}_B|} \varphi \mathcal{M}_\eta \\
& \left. + 8\pi^2 \lambda_\mu \langle 0 | T \bar{\psi}_i(x_-) \gamma^\mu \psi_j(x_+) | 0 \rangle \cdot h_{ij} \right\}
\end{aligned}$$

Selbst das noch ausstehende Pfadintegral $\int \mathcal{D}\mathcal{M}_\eta \mathcal{D}\overline{\mathcal{M}}_\eta \dots$ kann erledigt werden:

$$\begin{aligned}
\int d^4x \tilde{\mathcal{L}}_{eff}^{(M)\varphi\eta} &= -i \ln \int \mathcal{D}\mathcal{M}_\eta \mathcal{D}\overline{\mathcal{M}}_\eta e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{eff}^{(M)\varphi\eta}} \\
&= -i \text{Tr} \ln \left\{ (i\partial - \not{A} - \underline{m}) \cdot \underline{\epsilon} - 8\pi^2 \not{\chi} \underline{h} e^{\vec{\xi}\vec{\partial}/2} - \mathcal{M}_\varphi \cdot \underline{h} \right\} \\
&+ \int d^4x \left\{ \lambda_\mu A^\mu + \mathcal{M}_\varphi \cdot \varphi + 8\pi^2 \lambda_\mu \langle 0 | T \bar{\psi}_i(x_-) \gamma^\mu \psi_j(x_+) | 0 \rangle h_{ij} \right. \\
&+ \overline{\eta} \left[\varphi \sqrt{|\tilde{\ell}_A|} \left\{ \frac{1}{(i\partial - \not{A} - \underline{m}) \cdot \underline{\epsilon} - 8\pi^2 \not{\chi} \underline{h} e^{\vec{\xi}\vec{\partial}/2} - \mathcal{M}_\varphi \cdot \underline{h}} \right\}_{AB} \sqrt{|\tilde{\ell}_B|} \varphi \right]^{-1} \eta \left. \right\} \\
&- i \text{Tr} \ln \left\{ -\varphi \sqrt{|\tilde{\ell}_A|} \left\{ \frac{1}{(i\partial - \not{A} - \underline{m}) \cdot \underline{\epsilon} - 8\pi^2 \not{\chi} \underline{h} e^{\vec{\xi}\vec{\partial}/2} - \mathcal{M}_\varphi \cdot \underline{h}} \right\}_{AB} \sqrt{|\tilde{\ell}_B|} \varphi \right\}
\end{aligned} \tag{7.7}$$

• (4) $\Rightarrow$:

$$\begin{aligned}
\int d^4x \mathcal{L}_{eff}^{\varphi\eta} &= -i \text{Tr} \ln \left\{ (i\partial - \not{A} - \underline{m}) \cdot \underline{\epsilon} - 8\pi^2 \not{\chi} \underline{h} e^{\vec{\xi}\vec{\partial}/2} - \varphi \cdot \underline{h} \cdot u + \varphi^2 \cdot \underline{h} \cdot v \right\} \\
&+ \int d^4x \left\{ \lambda_\mu \cdot A^\mu + \frac{1}{2} \varphi^2 \cdot u + \overline{\eta} \eta \cdot v \right. \\
&- v^2 \sum_{A,B} \sqrt{|\tilde{\ell}_A \tilde{\ell}_B|} \cdot \overline{\eta} \varphi \left\{ \frac{1}{(i\partial - \not{A} - \underline{m}) \cdot \underline{\epsilon} - 8\pi^2 \not{\chi} \underline{h} e^{\vec{\xi}\vec{\partial}/2} - \varphi \underline{h} \cdot u + \varphi^2 \cdot \underline{h} \cdot v} \right\}_{AB} \varphi \eta \\
&\left. + 8\pi^2 \lambda_\mu \langle 0 | T \bar{\psi}_i(x_-) \gamma^\mu \psi_j(x_+) | 0 \rangle \cdot h_{ij} \right\}
\end{aligned} \tag{7.8}$$

Beide Male wurden die in den subkanonischen Feldern linearen Terme der Lagrangedichte $\mathcal{L} \dots$ zuerst durch eine Feldtranslation beseitigt (quadratische Ergänzung). Die Punkttrennungs-Regularisierung (4.17) des Multiplikatorfeld-Vertex und die PV-Regularisierung des reinen Eichfeldsektors, welche wir aus Kapitel 4 kennen, werden aufrecht erhalten.

Wir beschäftigen uns jetzt näher mit der stationären Phasennäherung der effektiven Lagrangedichten (6), (7), (8) (vgl. Abschnitt 5.2.2).

- $\int d^4x \mathcal{L}_{eff}^{(M)\varphi\eta}$ wird dazu nach $A_\mu, \lambda_\nu, \varphi, \mathcal{M}_\varphi, \overline{\eta}, \mathcal{M}_\eta, \eta, \overline{\mathcal{M}}_\eta$ variiert. Hat man vorher auch das skalare Verbundfeld φ als den endlichen Anteil eines Punkttrennungs-regularisierten

Operatorprodukts im Grenzfall $\xi \rightarrow 0$ erklärt, d. h. man ersetzt (1) durch

$$\varphi(x) = \overline{\lim}_{\xi \rightarrow 0} \left(\bar{\chi}(x_-) \tilde{\chi}(x_+) - \langle 0 | T \bar{\chi}(x_-) \tilde{\chi}(x_+) | 0 \rangle_{\text{freie Felder}} \right) \quad (7.9)$$

so erweist sich die konstante Konfiguration

$$\begin{aligned} A^\mu &= \lambda_\nu = \varphi = \mathcal{M}_\varphi = 0 \\ \eta &= \overline{\mathcal{M}}_\eta = \bar{\eta} = \mathcal{M}_\eta = 0 \end{aligned}$$

als ein stationärer Punkt dieser effektiven Wirkung.^[23]

- Desgleichen stellt man bei $\int d^4x \mathcal{L}_{eff}^{\varphi\eta}$ fest, daß unter Beachtung von (9) ein Sattelpunkt an der Stelle

$$A^\mu = \lambda_\nu = \varphi = 0; \quad \eta = \bar{\eta} = 0$$

im Funktionenraum liegt.

Ein Blick auf (7) oder (8) zeigt allerdings: nur ein nicht-verschwindender Vakuum-Erwartungswert

$$f = \langle \varphi(x) \rangle \neq 0 \quad (7.10)$$

erzeugt den kinetischen Term des Fermion-Verbundfeldes η schon bei den effektiven Wirkungen (7) bzw. (8) (ohne daß weitere Quantenkorrekturen in Anspruch genommen werden). $f \neq 0$ kann durchaus eintreten, falls das effektive Potential des skalaren Feldes φ mehrere Minima besitzt. Gleichzeitig wird jedoch die $U(1)$ -Eichinvarianz der effektiven Theorie gefährdet. Denn die Baumgraphen-Kontaktwechselwirkung $\int d^4x (A^\mu \lambda_\mu)$ wird nur unter der Bedingung $\sum_a \tilde{e}_A m_A^2 = -1$ (vgl. (4.46)) durch die entsprechende 1-Schleifen-Kopplung wieder ausgeglichen. Infolge von $f \neq 0$ findet man nun aber die nichtdiagonale, symmetrische Massenmatrix

$$\underline{m} + \underline{h} \underline{\underline{e}} \cdot f \cdot (u - fv) \quad (7.11)$$

im Argument des $\text{Tr} \ln$ -Funktionals (8), welche die oben genannte Spektralbedingung verletzt.

Sowohl (7) als auch (8) zeigen, daß die Kopplung des Fermion-Materiefeldes η an das Verbundfeld-Potential $A^\mu(x)$ durch eine minimale Substitution

$$i\partial_\mu \mapsto i\partial_\mu - A_\mu \quad (7.12)$$

des kanonischen Impulsoperators entsteht. Deshalb können wir die in (4.60) angegebene effektive Feinstrukturkonstante

$$\alpha = \frac{3\pi}{\sum_B \ln \left(\frac{\bar{\Lambda}^2}{m_B^2} \right)}$$

[23] Eine Übertragung auf $\tilde{\mathcal{L}}_{eff}^{(M)\varphi\eta}$ scheitert, weil darin verschiedene Terme für $\varphi = 0$ singulär werden.

für die Kopplung des A^μ -Vektorpotentials an ein geladenes Fermionfeld weiterhin verwenden.

Die Einzelheiten bei der Taylor-Entwicklung der betreffenden Operatorennenner um die jeweilige Vakuum-Feldkonfiguration sind dabei belanglos. Natürlich kann man auf diesem Weg ermitteln, ob das Materiefeld η phänomenologisch unerwünschte Eigenschaften besitzt (z. B. negatives Vorzeichen des kovarianten kinetischen Terms oder eine Ruhemasse, welche mit den subkanonischen Parametern M bzw. Λ vergleichbar ist).

Wir weisen kurz darauf hin, daß die von uns eingeführten Materie-Hilfsfelder nicht notwendig kanonische kinetische Operatoren (bzgl. einer Dilatation (2.14)) erwerben. Zum Beispiel liefert (7) den kinetischen Term

$$\bar{\eta} \left(f^2 \sum_A \frac{\not{\partial}_A}{(i\not{\partial} - m_A)} \right)^{-1} \eta = f^{-2} \bar{\eta} \cdot \left\{ (i\not{\partial} - M) \cdot (\Lambda^2 + (i\not{\partial})^2) \right\} \cdot \eta \quad (7.13)$$

für das fermionische Verbundfeld. Offenbar gelangt man nur im Grenzfall niedriger Energien, Impulskomponenten $\ll \Lambda$ zum kanonischen Dirac-Operator $\sim (i\not{\partial} - M)$ (bis auf einen unwesentlichen Normierungsfaktor).

Anhang A. Zwei mögliche Formen der effektiven Wirkung in der subkanonischen Spinortheorie

Die beiden Funktionale

$$\phi_{sub} = \text{Tr} \ln \{ -(P_M - \not{A})(P_\Lambda - \not{A})(P_{-\Lambda} - \not{A}) - \not{\chi} \} \quad (A.1)$$

und

$$\phi_{pol} = \text{Tr} \ln \left\{ (\underline{\underline{P}} - \underline{\underline{A}}) \cdot \underline{\underline{\epsilon}} - \not{\chi} \underline{\underline{h}} \right\} \quad (A.2)$$

sind bis auf eine Konstante identisch; $P_m = (i\not{\partial} - m)$ dient als Abkürzung für den freien kinetischen Dirac-Operator; die Spur Tr in (2) bezieht sich außerdem auf den Spektral-Raum ($\underline{\underline{P}} = i\not{\partial} - \underline{\underline{m}}$) mit $\underline{\underline{m}} = \text{diag}(M, \Lambda, -\Lambda)$; $\underline{\underline{\epsilon}} = \text{diag}(1, -1, -1)$; $\underline{\underline{h}}_{AB} = \sqrt{|\vec{\epsilon}_A \cdot \vec{\epsilon}_B|}$ (vgl. (2.50)).

Offensichtlich sind dann auch die effektiven Wirkungen (4.3), (4.4) einander gleich, welche durch eine Grassmann-Funktionalintegration bezüglich des subkanonischen Spinorfelds $\tilde{\chi}$ bzw. in der Polfeldbasis $\psi_A (A \in \{M, \Lambda, -\Lambda\})$ erhalten wurden.

Beweis:

Ähnlich wie in (2.48) besteht die Partialbruchzerlegung

$$\frac{-1}{(P_M - \not{A})(P_\Lambda - \not{A})(P_{-\Lambda} - \not{A})} = \sum_C \tilde{\epsilon}_C \frac{1}{P_C - \not{A}} \quad (A.3)$$

des inversen subkanonischen kinetischen Operators, weil die verschiedenen $(P_m - \not{A})$ kommutieren.

Bei zweifacher Anwendung der Produkteigenschaft der Funktionaldeterminante entsteht aus (1):

$$\phi_{sub} = X + \sum_C \text{Tr} \ln \left(1 - \frac{1}{P_C} \not{A} \right) + \text{Tr} \ln \left(1 - \sum_C \frac{\tilde{\epsilon}_C}{P_C - \not{A}} \not{\chi} \right) \quad (A.1')$$

wobei formal

$$X = \sum_C \text{Tr} \ln (-P_C) \quad (A.4)$$

auftritt.

Andererseits kann man das $\text{Tr} \ln$ -Argument von (2) gemäß

$$(\underline{\underline{P}} - \not{A}) \cdot \underline{\underline{\epsilon}} - \not{\chi} \underline{\underline{h}} = (\underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{\epsilon}}) \left(1 - \frac{1}{\underline{\underline{P}}} \not{A} \right) \cdot \left\{ \underline{\underline{1}} - \underline{\underline{\epsilon}} \frac{1}{\underline{\underline{P}} - \not{A}} \not{\chi} \underline{\underline{h}} \right\} \quad (A.5)$$

faktorisieren

$\Rightarrow$

$$\phi_{pol} = \text{Tr} \ln (\underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{\epsilon}}) + \text{Tr} \ln \left(\underline{\underline{1}} - \frac{1}{\underline{\underline{P}}} \not{A} \right) + \text{Tr} \ln \left\{ \underline{\underline{1}} - \frac{1}{\underline{\underline{P}} - \not{A}} \not{\chi} \underline{\underline{h}} \right\} \quad (A.2')$$

Im zweiten Term wird der triviale Logarithmus einer diagonalen Massenparameter-Matrix verlangt. Der dritte Tr ln -Ausdruck vereinfacht sich, wenn man die Identität

$$\begin{aligned} \text{Tr ln}(\underline{\underline{1}}^{(a)} - \underline{\underline{u}} \cdot \underline{\underline{v}}) &= \text{Tr ln}(\underline{\underline{1}}^{(b)} - \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{u}}) \\ \underline{\underline{u}} \in M(a \times b), \quad \underline{\underline{v}} \in M(b \times a), \quad \underline{\underline{1}}^{(c)} &= \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{c \text{ mal}}) \end{aligned} \quad (A.6)$$

(zyklische Eigenschaft der Spur!) mit der Zerlegung

$$\underline{\underline{\epsilon}} \cdot \underline{\underline{h}} = (\underline{\underline{\epsilon}} \cdot \underline{\underline{v}}) \cdot \underline{\underline{v}}^T \quad (\underline{\underline{v}}^T = (\sqrt{|\check{e}_M|}, \sqrt{|\check{e}_\Lambda|}, \sqrt{|\check{e}_{-\Lambda}|}))$$

in Verbindung bringt:

$$\begin{aligned} \phi_{pol} &= \hat{X} + \sum_C \text{Tr ln} \left(1 - \frac{1}{P_C} \mathcal{A} \right) + \text{Tr ln} \left(1 - \sum_C \frac{\check{e}_C}{P_C - \mathcal{A}} \right) \\ (\hat{X} &:= \text{Tr ln}(\underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{\epsilon}}) = \sum_C \text{Tr ln}(P_C \epsilon_C)) \end{aligned} \quad (A.2'')$$

$\Rightarrow$ (vgl. (1')):

$$\phi_{sub} - \phi_{pol} = X - \tilde{X} \quad (A.7)$$

q.e.d.

Natürlich geht diese formale Begründung nicht auf die Frage nach der Konvergenz der ln -Reihe bzw. die Konvergenz unter der Raum-Zeit-Spur (diagonale Reihe) ein.

Der Vergleich der expliziten Potenzreihenentwicklung für

$$\{\phi_{sub} - \text{Tr ln}(-P_M \cdot P_\Lambda \cdot P_{-\Lambda})\} \text{ und } \{\phi_{pol} - \text{Tr ln}(\underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{\epsilon}})\}$$

erweist sich als umständlicher (insbesondere im Fall (1)); kombinatorische Überlegungen werden notwendig.

Anhang B. Die Pauli-Villars-Regularisierung bei asymptotisch gleichen Regulatormassen

Divergente Feynman-Integrale erkennt man am nicht-negativen oberflächlichen Divergenzgrad D des entsprechenden Feynman-Diagramms. Endliche Amplituden sind möglich, wenn entweder der Integrand oder der Integrationsbereich der Schleifenimpulse so angepaßt werden, daß die Impulsraumintegrale dann konvergieren. Eine Vorschrift, die dies leistet, heißt Regularisierung. Oft kann sie durch eine Menge kontinuierlicher Parameter gekennzeichnet werden; streben sie gegen einen Ausnahmepunkt, dann divergiert das Feynman-Integral.

Wir gehen hier auf einige Einzelheiten ein, die beim Umgang mit der 1949 von Pauli und Villars [10] entwickelten Regularisierungsmethode wichtig werden. Diese hat sich vor allem bei der Untersuchung von Strahlungskorrekturen in der Quantenelektrodynamik bewährt. Es geht darum, Fermionschleifen mit $D \geq 0$ zu regularisieren. Unterstellt man diagonale Kopplungen bezüglich der Fermionsorten, dann propagiert genau eine Fermionsorte (Masse: m) längs der Schleife. Den Integranden nennen wir

$$I_m(p; q_k) \quad (B.1)$$

mit p als Schleifenimpuls und q_k als den an den Vertizes eintreffenden äußeren Impulsen. Der regularisierte Integrand entsteht daraus wie folgt:

$$I_m^{\text{reg}}(p; q_k) = I_m(p; q_k) + \sum_{i=1}^n \varrho_i I_{\Lambda_i}(p; q_k) \quad (B.2)$$

Die reellen Parameter ϱ_i und die ihnen zugeordneten Regulatormassen Λ_i sind so zu wählen, daß

$$\left| \int d^4p I_m^{\text{reg}}(p; q_k) \right| < \infty \quad (B.3)$$

besteht. Übrigens folgt (2) sogar aus den Feynmanregeln einer regularisierten Lagrangedichte, wenn für sämtliche Parameter $\varrho_i \in \mathbb{Z}$ zutrifft (Regulatorfelder mit $\varrho_i < 0$ sind allerdings nach der Bose-Statistik zu quantisieren (vgl. [5])).

Wir stellen nun die Pauli-Villars-Bedingungen (kurz: PV) auf, welche eine endliche regularisierte Amplitude (3) zur Folge haben. Zuerst wird in (1) aber noch eine Wick-Rotation

$$p^0 \rightarrow i \cdot p_4 \quad (p_4 \text{ reell}), \quad q_i^0 \rightarrow i \cdot q_{i4} \quad (B.4)$$

erledigt. Damit bekommt man einen positiv definiten Lorentz-Skalar $p^2 = \vec{p}^2 + p_4^2$. Das asymptotische Verhalten von $I_m(p; q_k)$ für $p^2 \gg m^2, q_k^2$ ist formal durch

$$I_m(p; q_k) \longrightarrow \sum_{\delta=-4}^{D-4} \sum_{\sigma} A_{(D-4-\delta)}^{(\sigma)}(m, q_k) P_{\delta}^{(\sigma)}(p) + Q(m; p, q_k) \cdot (p^2)^{-\frac{5}{2}} \quad (B.5)$$

gegeben. $P_{\delta}^{(\sigma)}(p)$ steht für einen Lorentz-Tensor in den Komponenten von p mit dem Homogenitätsgrad δ , sein Tensorkoeffizient $A_{(D+4-\delta)}^{(\sigma)}(\dots)$ mit dem im unteren Index genannten nicht-negativen Homogenitätsgrad ist im allgemeinen eine Linearkombination aus Monomen in m, q_k .

$Q(\dots)$ bleibt bei hinreichend großem p^2 beschränkt. Überdies beruht (5) noch auf der Annahme, daß die Energiedimension der Amplitude mit D übereinstimmt.

Die 4-dimensionale euklidische Volumenintegration über den Schleifenimpuls p konvergiert daher mit dem Integranden (2), falls das inhomogene in ϱ_i lineare Gleichungssystem (PV-Bedingungen)

$$m^k + \sum_{i=1}^n \varrho_i \Lambda_i^k = 0 \quad k \in \{0, \dots, D\} \quad (B.6)$$

erfüllt wird.

Sind keine zwei Regulatormassen Λ_i einander gleich, dann existiert eine eindeutige Lösung $(\varrho_1, \dots, \varrho_n)$, sobald $n = (D + 1)$ genommen wird. Der maximale Rang des Systems (6) wird aus der Formel

$$\det(\Lambda_i^k) =: V(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n) = \prod_{i>j} (\Lambda_i - \Lambda_j) \quad (B.7)$$

$$(i, j \in \{1, \dots, n\}, \quad k \in \{0, \dots, n-1\})$$

für die Vandermonde-Determinante V deutlich.

Die Lösung lautet deshalb:

$$\varrho_i = - \frac{V(\Lambda_1, \dots, \Lambda_{i-1}, m, \Lambda_{i+1}, \dots, \Lambda_n)}{V(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)} = \frac{\prod_{j=1}^n (m - \Lambda_j)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\Lambda_i - \Lambda_j)(\Lambda_i - m)} \quad (B.8)$$

Bei der Entwicklung der regularisierten 1-Loop-Amplitude nach Monomen in den äußeren Impulsvariablen q_i erscheinen zwei Arten von mit ϱ_i gewichteten Summen als Koeffizienten:

$$\begin{cases} S_n(\alpha) = m^\alpha + \sum_{i=1}^n \varrho_i \Lambda_i^\alpha \\ R_n(\alpha) = \sum_{i=1}^n \varrho_i \Lambda_i^\alpha \ln \left(\frac{\Lambda_i^2}{m^2} \right) \end{cases} \quad (B.9)$$

Der Exponent α ist in dieser Anwendung eine natürliche Zahl; jedoch dürfen S_n, R_n als Funktionen des reellen Parameters α angesehen werden. Wir kennen bereits (wegen (6))

$$S_n(\alpha) = 0 \quad \text{für} \quad \alpha \in \{0, 1, \dots, (n-1)\} \quad (B.10)$$

Durch Differentiation von $S_n(\alpha)$ erhält man den Zusammenhang:

$$R_n(\alpha) = (2 \cdot \partial_\alpha - \ln m^2) S_n(\alpha) \quad (B.11)$$

Zuerst wird $S_n(\alpha)$ berechnet, wobei der Grenzfall gleicher Regulatormassen $\Lambda_i \rightarrow \Lambda$ vorausgesetzt wird. Natürlich divergieren dann nach (8) zwar alle PV-Parameter ϱ_i ; trotzdem konvergieren

$S_n(\alpha)$ und $R_n(\alpha)$, wie wir gleich feststellen. Der Residuensatz erlaubt die Darstellung:

$$S_n(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \varrho(z) h(z) dz + m^\alpha \quad (B.12a)$$

$$\text{mit } \begin{cases} \varrho(z) = \frac{\prod_{j=1}^n (m - \Lambda_j)}{\prod_{j=1}^n (z - \Lambda_j) \cdot (z - m)} \\ h(z) = z^\alpha \end{cases} \quad (B.12b)$$

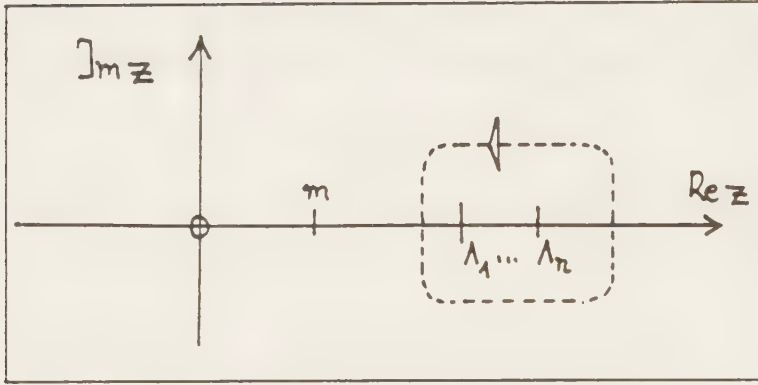


Abb. 13: Umlaufintegral zur Bestimmung von $S_n(\alpha)$

C bezeichnet hier einen geschlossenen, positiv orientierten Weg in der komplexen z -Ebene, der die Pole Λ_i in allgemeiner Lage von $\varrho(z)$ in seinem Inneren enthält, während der Pol $z = m$ im Außenraum liegt (vgl. Bild 13).

Streben alle Λ_i gleichmäßig gegen $\Lambda \neq m$, dann wird offenbar der Grenzwert:

$$\begin{aligned} S_n(\alpha) &= \text{Res}_{z=\Lambda} \left\{ \frac{z^\alpha (m - \Lambda)^n}{(z - \Lambda)^n (z - m)} \right\} + m^\alpha \\ &= m^\alpha + \frac{(m - \Lambda)^n}{(n-1)!} \left(\frac{z^\alpha}{z - m} \right)^{(n-1)} \Big|_{z=\Lambda} \end{aligned} \quad (B.13)$$

erreicht. Mit der Leibniz-Regel wird hieraus:

$$S_n(\alpha) = m^\alpha - \Lambda^\alpha \sum_{\sigma=0}^{(n-1)} \binom{n-1}{\sigma} \left(-1 + \frac{m}{\Lambda}\right)^\sigma \quad (B.14)$$

Wir schließen aus (6), daß mindestens ein PV-Parameter ϱ_k negativ ist; das zugeordnete Feld der Masse Λ_k kann physikalisch nicht sinnvoll gedeutet werden. Deshalb schickt man den allgemeinen

Cutoff Λ formal gegen ∞ , um das Auftreten unphysikalischer Zustände im asymptotischen Bereich $t \rightarrow \pm\infty$ zu verhindern. Dann wird aus (13):

$$S_n(\alpha) \xrightarrow{\Lambda \gg m} \begin{cases} 0 & , \alpha \in \{0, 1, \dots, n-1\} \\ m^\alpha & , \alpha < 0 \\ (-1)^n \Lambda^\alpha \binom{\alpha-1}{n-1} & , \alpha > 0, \alpha \notin \{0, 1, \dots, n-1\} \end{cases} \quad (B.15)$$

Insbesondere:

$$S_n(n) \xrightarrow{\Lambda \gg m} (-\Lambda)^n \quad (B.16)$$

Als Nächstes wird (13) in (11) eingesetzt und es entsteht:

$$R_n(\alpha) = -\Lambda^\alpha \sum_{\sigma=0}^{n-1} \binom{\alpha}{\sigma} \left(-1 + \frac{m}{\Lambda}\right)^\sigma \left\{ \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) + 2 \cdot \sum_{\ell=0}^{\sigma-1} \frac{1}{\alpha - \ell} \right\} \quad (B.17)$$

Für ganzzahliges α im Intervall $[0, n-1)$ soll $R_n(\alpha)$ als der Grenzwert $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} R_n(\alpha + \epsilon)$ verstanden werden. Man entnimmt schließlich wieder die führenden Beiträge, wenn $\frac{m}{\Lambda} \rightarrow 0$:

$$R_n(\alpha) \xrightarrow{\Lambda \gg m} \begin{cases} -m^\alpha \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) - 2 \cdot \frac{(-\Lambda)^\alpha}{\alpha \cdot \binom{n-1}{\alpha}} & , \alpha \in \{1, \dots, n-1\} \\ -\ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) + 2 \cdot \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{1}{\ell} & , \alpha = 0 \\ \Lambda^\alpha (-1)^n \left\{ \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) + 2\partial_\alpha \right\} \binom{\alpha-1}{n-1} & , \text{sonst} \end{cases} \quad (B.18)$$

Als besonderen Fall erwähnen wir noch:

$$R_n(n) \xrightarrow{\Lambda \gg m} (-\Lambda)^n \left\{ \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) + 2 \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{1}{\ell} \right\} \quad (B.19)$$

Entwickelt man das Binom in (17) vollständig bis zur 1. Ordnung in m/Λ , so gewinnt man alle in m linearen Terme von $R_n(\alpha)$. Gegenüber (18) tritt dann der zusätzliche Ausdruck

$$R'_n(\alpha) = m\Lambda^{\alpha-1} \left(2\partial_\alpha + \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) \right) \cdot \left(\alpha \cdot \binom{\alpha-2}{n-2} \cdot (-1)^{n-1} \right) \quad (B.20)$$

auf.

Einige ausgesuchte Exponenten α ergeben:

$$\frac{R'_n(\alpha)}{m} = \begin{cases} -2 \cdot \frac{n-1}{\Lambda} & , \alpha = 0 \\ 2 \cdot (-1 + \sum_{\sigma=1}^{n-2} \frac{1}{\sigma}) & , \alpha = 1 \leq (n-1) \\ -2 \cdot (-\Lambda)^{\alpha-1} \cdot \frac{\alpha}{(n-2) \cdot \binom{n-3}{\alpha-2}} & , \alpha \in \{2, \dots, n-1\} \end{cases} \quad (B.21)$$

Wir verwenden diese Resultate im 5. Kapitel bei der Diskussion der $U(1)$ -Spinortheorie von Amati et al.

Anhang C. Untersuchung von Feynman-Amplituden

C.1. EIN VERALLGEMEINERTES FURRY-THEOREM

Das ursprüngliche Furry-Theorem ergänzt die Feynmanregeln der QED: danach verschwindet die Summe solcher Feynman-Amplituden einer vorgelegten Greenfunktion, deren zugeordneter Graph eine Fermion-Schleife mit ungerader Anzahl von Photonvertizes enthält.

Diese Aussage folgt aus der diskreten Invarianz der QED bei einer Ladungskonjugation C . Wir übertragen die Operation C auf Spinortheorien, welche zusammengesetzte Hilfsfelder sowie Multiplikatorfelder besitzen.

- Als Beispiel einer subkanonischen Lagrangedichte haben wir

$$\mathcal{L}_\psi = \bar{\psi}_i ((i\partial - A) - m_i) \epsilon_i \psi_i + \lambda_\mu \left(A^\mu - 8\pi^2 \lim_{\xi \rightarrow 0} \bar{\psi}_i(x_-) \gamma^\mu \psi_j(x_+) \cdot h_{ij} \right) \quad (C.1)$$

vorgestellt (siehe (4.2)); die Punkttrennungs-Regularisierung wurde hervorgehoben. In der Dirac-Darstellung leistet die Matrix

$$C = i\gamma^2 \gamma^0 \quad (C^T = C^\dagger = -C; \quad C^2 = -1) \quad (C.2)$$

die Transposition der Diracmatrizen γ^μ (vgl. [5] S. 363):

$$C \gamma_\mu C^{-1} = -\gamma_\mu^T \quad (C.3)$$

Deswegen bleibt die Wirkung $\int d^4x \mathcal{L}_\psi$ invariant unter der unitären Operation:

$$C \quad \begin{cases} \psi_i \mapsto C \bar{\psi}_i^T \\ A^\mu \mapsto -A^\mu \\ \lambda_\nu \mapsto -\lambda_\nu \end{cases} \quad (C.4)$$

Abgesehen von der Transformation des Multiplikatorfelds λ_ν ist C mit der QED-Ladungskonjugation identisch. Die Forminvarianz der Zwangsbedingung beruht auf den Symmetrien der Spektral-Matrix $\underline{h}$ und der Regularisierungsvorschrift für $\xi^\alpha \mapsto (-\xi^\alpha)$.

Bei einer Ähnlichkeitstransformation (3) verhalten sich die Feynman-Regeln wie folgt (Ortsraumdarstellung):

$$\text{Propagator : } \int \frac{d^4p}{N} \frac{i\delta_{AB} e^{-ip(x-y)}}{\not{p} - m_A} = \underline{S}_F(x, y; A)_{AB} \mapsto (\underline{S}_F^T)_{AB}(y, x; A) \quad (C.5a)$$

$$\text{Photonvertex : } -i\gamma^\mu \epsilon_A \delta_{AB} \delta(\dots) \mapsto i(\gamma^\mu \underline{\epsilon})_{AB}^T \delta(\dots) \quad (C.5b)$$

$$\text{Multiplikatorvertex : } -i\gamma^\mu h_{AB} e^{(\frac{\xi\theta}{2})} \delta(\dots) \mapsto i(\gamma^\mu \underline{h})_{AB}^T e^{(\frac{\xi\theta}{2})} \delta(\dots) \quad (C.5c)$$

$$\text{Kontaktpropagator : } i\delta(x-y) \mapsto i\delta(y-x) \quad (C.5d)$$

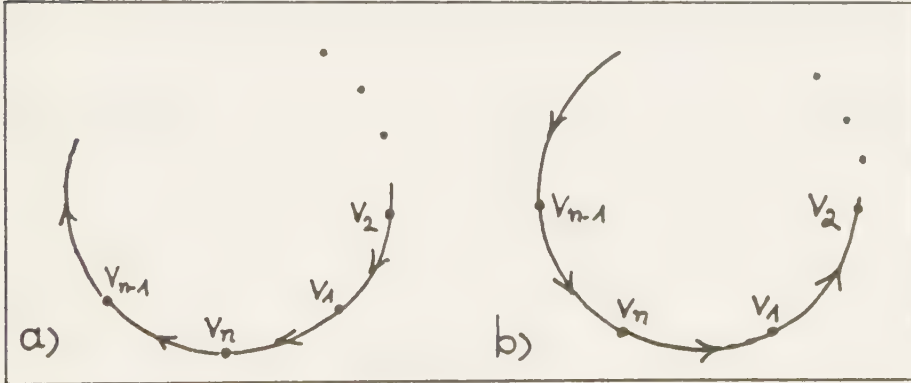


Abb. 14: Zwei verschiedene Feynman-Graphen, die zu einer 1-Loop-Greenfunktion mit den Vertizes $v_1, \dots, v_i, \dots, v_n$ gehören (Indizes x_i etc. sind unterdrückt). Sie unterscheiden sich lediglich durch die Orientierung der Schleife ($n = 1, 2$ sind Ausnahmefälle).

Das in Bild 14(a) angegebene Diagramm einer effektiven Fermion-1-Schleifenwechselwirkung hat als Ortsraumamplitude ($n \geq 1$):

$$\mathcal{A}_\odot = - \overline{\lim}_{\xi \rightarrow 0} \text{tr}_{D,F} \left\{ \underline{V}_1(x_1, \xi) \underline{S}_F(x_1, x_2) \underline{V}_2(x_2, \xi) \underline{S}_F(x_2, x_3) \underline{V}_3(x_3, \xi) \dots \right. \\ \left. \underline{S}_F(x_{n-1}, x_n) \underline{V}_n(x_n, \xi) \underline{S}_F(x_n, x_1) \right\} \quad (C.6)$$

wobei $\underline{V}_i(x_i; \xi)$ die Spinorvertex-Regeln bedeuten können (siehe (5b), bzw. (5c)). Die Punkttrennungs-Regularisierung $\overline{\lim}_{\xi \rightarrow 0}$ tritt in Kraft, wenn Multiplikatorvertizes erscheinen. Eine eventuell erforderliche PV-Regularisierung des reinen Eichsektors (nach Gewichtung von (6) mit dem äußeren Photonenfeld) vertauscht mit der Transformation (3), weil das Argument von tr_F dann eine in den Massenparametern diagonale Matrix ist.

Jedenfalls ist $\text{tr}_{D,F}$ invariant unter der Ähnlichkeitstransformation (3) sämtlicher Faktoren seines Arguments und einer sich anschließenden globalen Transposition, denn tr ist ein zyklisches Funktional.

$\Rightarrow$

$$\mathcal{A}_{\bigcirc} = -(-1)^n \overline{\lim}_{\xi \rightarrow 0} \text{tr}_{D,F} \left\{ \cdots \underline{S}_F(x_3, x_2) \underline{V}_2(x_2, -\xi) \underline{S}_F(x_2, x_1) \underline{V}_1(x_1, -\xi) \right. \\ \left. \cdot \underline{S}_F(x_1, x_n) \underline{V}_n(x_n, -\xi) \cdots \right\} \quad (C.7)$$

Die rechte Seite enthält jetzt die Feynman-Amplitude $\mathcal{A}_{\bigcirc}$ zu Bild 14(b) mit entgegengesetztem Orientierungssinn ($\overline{\lim}_{\xi \rightarrow 0}$ ist symmetrisch bei $\xi \mapsto (-\xi)$ wegen der impliziten Raumwinkelintegration):

$$\mathcal{A}_{\bigcirc} = (-1)^n \mathcal{A}_{\bigcirc} \quad (C.8)$$

Da jeweils die Summe $\{\mathcal{A}_{\bigcirc} + \mathcal{A}_{\bigcirc}\}$ zur 1-Loop-Greenfunktion beiträgt, kann man auf diese Amplituden verzichten, wenn es sich um eine ungerade Anzahl von Photon- und Multiplikator-Vertizes handelt.

Beim Sonderfall $n = 1$ hat man von vornherein $\mathcal{A}_{\bigcirc} = \mathcal{A}_{\bigcirc}$ und wegen (8) verschwindet die Tadpole-Greenfunktion.

- Ein anders aufgebautes Hilfsfeld A^μ begegnete uns in den Arbeiten von Amati et al (vgl. [3], [4]). Als Modelltheorie wird die Lagrangedichte (5.9)

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial - \not{A} - m)\psi + \lambda^\mu (A_\mu \cdot v - \bar{\psi} i \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi) + \lambda(\bar{\psi}\psi - v) \quad (C.9)$$

verwendet. Wir erkennen diesmal die diskrete Symmetrie:

$$C \quad \begin{cases} \psi \mapsto C \bar{\psi}^T, \\ A^\mu \mapsto -A^\mu, \\ \lambda_\nu \mapsto -\lambda_\nu, \\ \lambda \mapsto \lambda \end{cases} \quad (C.10)$$

(beachte an dieser Stelle $(\overleftrightarrow{\partial}^\mu)^T = -\overleftrightarrow{\partial}^\mu$).

Der Diracpropagator S_F und der Vertex des Vektorpotentials A^μ transformieren sich unter der Ähnlichkeitsabbildung (3) wieder gemäß (5a), (5b). Folgende Vertizes mit dem Diracfeld ψ treten neu auf:

$$\begin{aligned} \text{Vektormultiplikator:} \quad & \overleftrightarrow{\partial}_\mu \cdot \delta(\dots) \mapsto -(\overleftrightarrow{\partial}_\mu)^T \delta(\dots) \\ \text{Skalarmultiplikator:} \quad & i\delta(\dots) \mapsto i\delta(\dots) \end{aligned} \quad (C.11)$$

Für Feynman-Loop-Amplituden mit a Photonfeldern A^μ , b Vektormultiplikatoren λ_ν und c Skalarmultiplikatoren λ an den Vertizes gilt daher die Beziehung

$$A_{\odot} = (-1)^{a+b} \cdot A_{\ominus} \quad (C.12)$$

falls sich beide Diagramme nur hinsichtlich der Orientierung unterscheiden.

Es ist also überflüssig, effektive 1-Schleifen-Wechselwirkungen zu untersuchen, an denen eine ungerade Anzahl ($a + b$) von Photon-, Vektormultiplikatorfeldern teilnimmt.

C.2. TRANSVERSALITÄT UND FORM DER EFFEKTIVEN WECHSELWIRKUNG

Die Feynman-Amplitude zu einer Wechselwirkung festgelegter Ordnung zwischen vorgegebenen äußeren Feldern werde

$$T^{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_r}$$

genannt. Es handelt sich um einen Lorentz-kovarianten Tensor vom Rang r , dessen Beschreibung im Impulsraum den Minkowski-Tensor $\eta^{\alpha\beta}$ sowie die 4-Impulse $v_{(i)}$ entlang seiner äußeren Beine erfordert ($1 \leq i \leq n$). Falls die Wechselwirkung unter einer Paritätstransformation invariant bleibt, wovon hier ausgegangen wird, kommt man ohne den Pseudotensor $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ zurecht. Die Koeffizienten c_λ der verschiedenen Produkte in T , welche mit $\eta, v_{(i)}^\rho$ als Faktoren gebildet werden, sind analytische Funktionen der invarianten Skalarprodukte $v_{(i)} \cdot v_{(j)} = s_{ij}$. Enthält die Feldtheorie Massenskalen $\neq 0$, dann treten an der Stelle $s_{ij} = 0$ ($i, j \in \{1, \dots, n\}$) keine Singularitäten bei den c_λ auf.

Besteht nun Transversalität bezüglich der Kontraktion von $T^{\dots}$ mit $v_{\alpha_1}^{(1)}$, d. h.

$$v_{\alpha_1}^{(1)} T^{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_r} \equiv 0 \quad (C.13)$$

dann gibt es einen ebenfalls regulären Tensor $\hat{T}^{\dots}$ vom Rang $(r + 1)$ mit der Eigenschaft

$$A_{\alpha_1} T^{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_r} = \left(v_\ell^{(1)} A_\sigma - v_\sigma^{(1)} A_\ell \right) \hat{T}^{\ell\sigma\alpha_2 \dots \alpha_r} \quad (C.14)$$

wobei A^μ im Impulsraum einen beliebigen 4-Vektor bezeichnet (etwa das QED-Vektorpotential). Gilt schließlich

$$A_\sigma = \int d^4x A_\sigma(x) e^{iv^{(1)} \cdot x}$$

dann stellt $(v_\rho^{(1)} A_\sigma - v_\sigma^{(1)} A_\rho)$ bis auf einen Faktor i die Fouriertransformierte des antisymmetrischen Feldstärkentensors $(\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho)(x) = F_{\rho\sigma}(x)$ dar.

Wir konstruieren $\hat{T}$:

$$\hat{T}^{\ell\sigma\alpha_2 \dots \alpha_r} = T^{\sigma\alpha_2 \dots \alpha_r} \left\{ \frac{v_{(1)}^\ell}{v_{(1)}^2} \right\} \quad (C.15)$$

löst (14) aufgrund der in (13) getroffenen Voraussetzung. Möglicherweise beinhaltet $\hat{T}^{\dots}$ jedoch einen singulären Koeffizienten. Wir betrachten dazu die eindeutige, rekursive Zerlegung

$$T^{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_r} = \sum_{i=1}^n v_{(i)}^{\alpha_1} R_{(i)}^{\alpha_2, \dots, \alpha_r} + \sum_{\ell=2}^r \eta^{\alpha_1 \alpha_\ell} S_{(\ell)}^{\alpha_2, \dots, \cancel{\alpha_\ell}, \dots, \alpha_r} \quad (C.16)$$

wo $R_{(i)}^{\alpha_2, \dots, \alpha_r}, S_{(\ell)}^{\alpha_2, \dots, \alpha_r}$ Lorentz-Tensoren vom Rang $(r-1)$ bzw. $(r-2)$ vertreten.

Eine Anwendung von (13) liefert

$$R_{(1)}^{\alpha_2, \dots, \alpha_r} = - \sum_{i=2}^n \frac{\{v_{(1)} \cdot v_{(i)}\}}{v_{(1)}^2} R_{(i)}^{\alpha_2, \dots, \alpha_r} - \sum_{\ell=2}^r \frac{v_{(1)}^{\alpha_\ell}}{v_{(1)}^2} S_{(\ell)}^{\alpha_2, \dots, \alpha_r} \quad (C.17)$$

Infolge der Regularität von $R_{(1)}$ bei $v_{(1)}^2 = 0$ schließen wir durch Vergleich beider Seiten, daß

$$\frac{T^{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_r} - v_{(1)}^{\alpha_1} R_{(1)}^{\alpha_2, \dots, \alpha_r}}{v_{(1)}^2}$$

ebenso regulär wird. Anstelle von (15) erfüllt außerdem

$$\hat{T}^{\ell\sigma\alpha_2\dots\alpha_r} := \frac{T^{\sigma\alpha_2\dots\alpha_r} - v_{(1)}^\sigma R_{(1)}^{\alpha_2, \dots, \alpha_r}}{v_{(1)}^2} v_{(1)}^\ell \quad (C.18)$$

die Identität (14) und ist nach dem eben Gesagten auch regulär. q.e.d.

Als Nächstes besprechen wir eine Verallgemeinerung: die Feynman-Amplitude $T^{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_r}$ sei invariant gegen alle Permutationen der Paare $(\alpha_j, v_{(j)})$ ($j \in \{1, \dots, k\}$) und die Verjüngung mit $v_{(1)}^{\alpha_1}$ möge verschwinden.

$\Rightarrow \exists$ regulärer Tensor $\hat{T}$, dessen Rang $(r+k)$ beträgt, so daß die Identität

$$\begin{aligned} A_{\alpha_1} \dots A_{\alpha_k} T^{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_r} &= \prod_{j=1}^k \left(v_{\ell_j}^{(j)} A_{\sigma_j} - v_{\sigma_j}^{(j)} A_{\ell_j} \right) \cdot \hat{T}^{\ell_1 \dots \ell_k; \sigma_1 \dots \sigma_k; \alpha_{k+1} \dots \alpha_r} \\ &= \prod_{j=1}^k A_{\alpha_j} \left(\eta^{\alpha_j}_{\sigma_j} v_{\ell_j}^{(j)} - \eta^{\alpha_j}_{\ell_j} v_{\sigma_j}^{(j)} \right) \hat{T}^{\ell_1 \dots \ell_k; \sigma_1 \dots \sigma_k; \alpha_{k+1} \dots \alpha_r} \end{aligned} \quad (C.19)$$

möglich wird.

Wir beginnen den Beweis, indem (15) auf den Fall $k \geq 1$ ausgedehnt wird.

$$\tilde{T} = \prod_{j=1}^k \frac{v_{\ell_j}^{(j)}}{v_{(j)}^2} \cdot T^{\sigma_1 \dots \sigma_k; \alpha_{k+1} \dots \alpha_r} \quad (C.20)$$

erfüllt die Identität (19), wenngleich $\tilde{T}$ vielleicht singular ist. Alle Terme in T , welche über einen Faktor $v_{\sigma_j}^{(j)}$ ($1 \leq j \leq k$) verfügen, können entfernt werden, da die auf der rechten Seite von (20) entstehende Kontraktion in (ℓ_j, σ_j) antisymmetrisch ausfällt. Die verbleibenden Terme bilden einen Tensor Θ mit der Eigenschaft (19):

$$T^{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_r} = \prod_{j=1}^k \left(\eta^{\alpha_j}_{\sigma_j} - \frac{v_{\ell_j}^{\alpha_j} v_{\sigma_j}^{(j)}}{v_{(j)}^2} \right) \Theta^{\sigma_1 \dots \sigma_k; \alpha_{k+1} \dots \alpha_r} \quad (C.21)$$

Wir konnten T als regulär voraussetzen. Deshalb enthalten sämtliche Θ -Terme einen gemeinsamen Faktor $\{\prod_{j=1}^k v_{(j)}^2\} = \phi$, so daß $\{\frac{1}{\phi} \cdot \Theta\}$ regulär bleibt; die Definition von Θ gestattet keine andere Möglichkeit.

$\Rightarrow$

$$\hat{T}^{\ell_1 \dots \ell_k; \sigma_1 \dots \sigma_k; \alpha_{k+1} \dots \alpha_r} = \prod_{j=1}^k \frac{v_{(j)}^{\ell_j}}{v_{(j)}^2} \Theta^{\sigma_1 \dots \sigma_k; \alpha_{k+1} \dots \alpha_r} \quad (C.22)$$

steht als regulärer Tensor bereit, um (d) zu lösen.

Die Kontraktion von T mit mehreren Photonfeld-Variablen $A_{\mu_i}(v_i)$ kann daher als Funktional des Feldstärkentensors alleine beschrieben werden, wenn T bezüglich der Vektorindizes μ_i transversal ist.

Anhang D. Feynman-Integration

D.1. BEHANDLUNG DER EUKLIDISCHEN RAUMWINKELINTEGRATION

Mehrmals gaben wir uns damit zufrieden, 1-Loop-Diagramme unter der Voraussetzung hinreichend kleiner äußerer Impulse q_i zu berechnen. Deshalb wurde die Taylorentwicklung in q_i der Integranden bereits nach wenigen Termen abgebrochen. Nach einer Wick-Rotation $p^0 \rightarrow i \cdot p_4$ der 0-Komponente des Schleifenimpulses p^μ nahmen die einzelnen Entwicklungskoeffizienten die Form

$$K_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(f) = \int d^4 p p_{\alpha_1} \dots p_{\alpha_n} f(p^2) \quad (D.1)$$

an, wobei $\alpha_i \in \{1, 2, 3, 4\}$, $p^2 = \sum_{i=1}^4 p_i^2$. Darin ist $f(p^2)$ irgendeine skalare Funktion bezüglich der Drehgruppe $SO(4)$ des euklidischen Impulsraums, die asymptotisch hinreichend schnell abfallen möge, so daß $\int d^4 p \dots$ existiert.

Die Zahl der Faktoren p_i in $\{p_{\alpha_1}, \dots, p_{\alpha_n}\}$ wird λ_i genannt. Da sowohl f als auch das Integrationsmaß $d^4 p$ invariant gegen Ebenen-Spiegelungen sind, kann von geradzahigen λ_i ($i \in \{1, 2, 3, 4\}$) ausgegangen werden; sonst verschwindet $K_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(f)$.

Wegen der Rotationssymmetrie von p^2 , $d^4 p$ sind Polarkoordinaten $p, \theta_2, \theta_1, \phi$ am geeignetsten zur weiteren Untersuchung von (1):

$$\begin{cases} p_1 = p \sin \theta_2 \sin \theta_1 \cos \phi \\ p_2 = p \sin \theta_2 \sin \theta_1 \sin \phi \\ p_3 = p \sin \theta_2 \cos \theta_1 \\ p_4 = p \cos \theta_2 \\ \int d^4 p = \int \frac{d\Omega_{(4)}}{2} \int_0^\infty 2p^3 dp \quad \text{mit } d\Omega_{(4)} = \sin^2 \theta_2 \sin \theta_1 d\theta_1 d\theta_2 d\phi \end{cases} \quad (D.2)$$

Dann folgt ($n = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$ wird benutzt)

$$\begin{aligned}
 K_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(f) &= \frac{1}{2} \int_0^\pi d\theta_2 \int_0^\pi d\theta_1 \int_0^{2\pi} d\phi \left(\cos^{\lambda_4} \theta_2 (\sin \theta_2)^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 2)} \cos^{\lambda_3} \theta_1 \right. \\
 &\quad \cdot (\sin \theta_1)^{(\lambda_1 + \lambda_2 + 1)} \cos^{\lambda_1} \phi \sin^{\lambda_2} \phi \left. \right) \cdot \int_0^\infty dx x^{1 + \frac{n}{2}} f(x) \\
 &= \frac{\prod_{i=1}^4 \Gamma\left(\frac{\lambda_i + 1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 2\right)} \cdot \int_0^\infty dx x^{(1 + \frac{n}{2})} \cdot f(x)
 \end{aligned} \tag{D.3}$$

weil jedes Polarwinkelintegral mit der Eulerschen Beta-Funktion

$$\int_0^\pi \cos^r \phi \sin^s \phi d\phi = \frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r+s+2}{2}\right)} \quad (s \in \mathbb{N}_0, \quad r \in 2 \cdot \mathbb{N}_0) \tag{D.4}$$

in Verbindung steht. Es bleibt noch das Integral über die Radialvariable übrig.

Hinsichtlich möglicher Verjüngungen der K -Indizes mit äußeren 4-Impulsen q_i ist die rechte Seite von (3) ungeeignet, da ihr die Tensorgestalt fehlt. Dieser Mangel kann schnell behoben werden. Die Rekursionsformel

$$\delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \sum_{i=2}^n \delta_{\alpha_1 \alpha_i} \cdot \delta_{\alpha_2 \dots \alpha_{i-1} \dots \alpha_n} \tag{D.5}$$

definiert ein n -stufiges Kronecker-Delta (n geradzahlig) mit dem Wertebereich $\{0, 1\}$; $\delta_{\alpha\beta} = \text{diag}(1, 1, 1, 1)$ hat die bekannte Bedeutung. $\delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ ist vollständig symmetrisch.

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
 \delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n} &= \delta_{\underbrace{1 \dots 1}_{\lambda_1 -} \underbrace{2 \dots 2}_{\lambda_2 -} \underbrace{3 \dots 3}_{\lambda_3 -} \underbrace{4 \dots 4}_{\lambda_4 \text{-mal}}} \\
 &= \prod_{i=1}^4 \{(\lambda_i - 1)(\lambda_i - 3) \dots 1\} \\
 &= \prod_{i=1}^4 \Gamma\left(\frac{\lambda_i + 1}{2}\right) \cdot \frac{2^{\frac{n}{2}}}{\pi^2}
 \end{aligned} \tag{D.6}$$

Wir sind am Ziel:

$$K_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(f) = \int_0^\infty dx x^{(1 + \frac{n}{2})} f(x) \frac{\pi^2}{2^{\frac{n}{2}} \cdot (n/2 + 1)!} \cdot \delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \tag{D.7}$$

Spezielle Werte der Normierungsfaktoren $N(n) = 2^{n/2}(n/2 + 1)!$ (n gerade) lauten:

$$N(0) = 1, \quad N(2) = 4, \quad N(4) = 24, \quad N(6) = 192, \quad N(8) = 1920, \quad \dots \tag{D.8}$$

Eine von der Herleitung unabhängige, schnelle Kontrolle des Ergebnis (6) ergibt sich durch beidseitige Kontraktion mit $\delta_{\alpha_1 \alpha_2} \cdot \dots \cdot \delta_{\alpha_{(n-1)} \alpha_n}$.

D.2. BESTIMMTE INTEGRALE MIT RATIONALEN INTEGRANDEN

In den 1-Schleifen-Diagrammen der nichtlinearen Spinortheorie propagieren nach dem Vorschlag (2.49) von H. Saller Polfelder mit den Massen $M, \Lambda, -\Lambda$. Nach der Einführung einer euklidischen Metrik im Impulsraum kann das Integral über den Schleifenimpuls p^μ in ein Raumwinkelintegral und ein 1-dimensionales Integral über $x = p^2 \in [0, \infty)$ faktorisiert werden. Ersteres haben wir soeben geschlossen ausgewertet (siehe (7)). Die zweite Aufgabe betrifft das uneigentliche Integral:

$$G_{\alpha, \beta}^\gamma = \int_0^\infty dx \frac{x^\gamma (M^2)^{\alpha+\beta-\gamma-1}}{D_M^\alpha \cdot D_\Lambda^\beta} \quad (D.9)$$

$$(\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}_0; \quad \alpha + \beta - \gamma > 1)$$

Die Nennerfaktoren $D_M = x + M^2$, $D_\Lambda = x + \Lambda^2 = x + (-\Lambda)^2$ stammen von den rationalisierten Polfeldpropagatoren, worin die äußeren Impulse q^i im Anschluß an eine Taylorentwicklung des Integranden gleich Null gesetzt wurden.

Wegen

$$\frac{1}{D_\Lambda \cdot D_M} = \frac{\zeta}{\Lambda^2} \cdot \left(\frac{1}{D_M} - \frac{1}{D_\Lambda} \right) \quad \text{mit } \zeta = \frac{1}{1-\varrho}; \quad \varrho = \frac{M^2}{\Lambda^2} \quad (D.10)$$

verfügen wir über die Rekursionsformel:

$$G_{\alpha, \beta}^\gamma = \varrho \zeta \left\{ G_{\alpha, \beta-1}^\gamma - G_{\alpha-1, \beta}^\gamma \right\} \quad (\alpha + \beta - \gamma - 2 > 0) \quad (D.11)$$

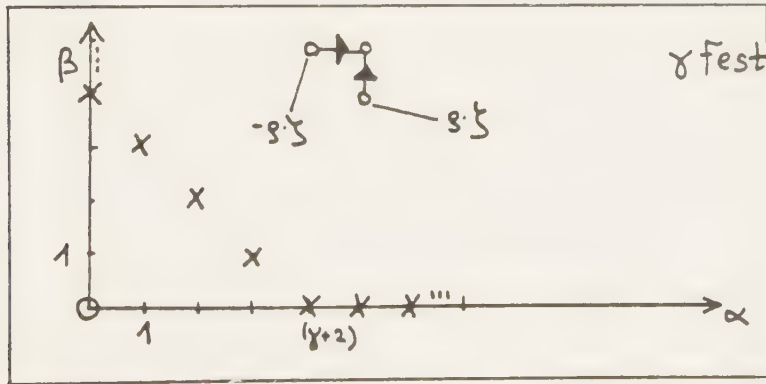


Abb. 15: Die Rekursionsformel (11) ist eine Verallgemeinerung des Pascalschen Dreiecks. Im (α, β) -Gitter sind die notwendigen Anfangswerte durch Kreuze gekennzeichnet.

Sie ist in Bild 15 veranschaulicht.

Ein positiver Exponent γ kann immer zerlegt werden als $\gamma = a + b$ mit $0 \leq a \leq \alpha$, $0 \leq b \leq \beta$. Die triviale Identität

$$x^\gamma = (D_M - M^2)^a \cdot (D_\Lambda - \Lambda^2)^b \quad (D.12)$$

zeigt, daß $G_{\alpha,\beta}^\gamma$ mit der Binomialformel zu einer Linearkombination der Integrale $G_{\alpha,\beta} := G_{\alpha,\beta}^0$ wird:

$$G_{\alpha,\beta}^\gamma = \sum_{\sigma=0}^a \sum_{\tau=0}^b \binom{a}{\sigma} \binom{b}{\tau} (-1)^{\gamma-\sigma-\tau} \varrho^{\tau-b} G_{\alpha-\sigma,\beta-\tau} \quad (D.13)$$

Daher genügt es, (9) für den speziellen Fall $\gamma = 0$ näher zu untersuchen.

Ohne die Rekursionsformel einzusetzen, findet man sofort die Resultate:

$$\begin{cases} G_{0,\beta} = \frac{\varrho^{\beta-1}}{\beta-1} \\ G_{\alpha,0} = \frac{1}{\alpha-1} \end{cases} \quad (D.14)$$

Beachtet man die Definition des uneigentlichen Integrals, so erhält man aus (10) schnell:

$$G_{1,1} = \varrho \cdot \zeta \cdot \epsilon \quad (\epsilon = \ln \left(\frac{\Lambda^2}{M^2} \right)) \quad (D.15)$$

Jedesmal ist die Zerlegung

$$G_{\alpha,\beta} = \zeta^{\alpha+\beta-2} \cdot \{ \zeta \epsilon B_{\alpha,\beta}(\varrho) + C_{\alpha,\beta}(\varrho) \} \quad (D.16)$$

möglich, in der $B_{\alpha,\beta}$ und $C_{\alpha,\beta}$ Polynome in ϱ bedeuten:

$$\begin{cases} B_{0,\beta} = 0 & ; C_{0,\beta} = \frac{1}{\beta-1} (1-\varrho)^{\beta-2} \cdot \varrho^{\beta-1} \\ B_{\alpha,0} = 0 & ; C_{\alpha,0} = \frac{1}{\alpha-1} \cdot (1-\varrho)^{\alpha-2} \\ B_{1,1} = \varrho & ; C_{1,1} = 0 \end{cases} \quad (D.17)$$

Der Ansatz (16) verträgt sich mit der Rekursion (11) und es entstehen zwei getrennte Rekursionsbeziehungen:

$$B_{\alpha,\beta} = \varrho \cdot (B_{\alpha,\beta-1} - B_{\alpha-1,\beta}) \quad (D.18a)$$

$$C_{\alpha,\beta} = \varrho \cdot (C_{\alpha,\beta-1} - C_{\alpha-1,\beta}) \quad (D.18b)$$

(18a) hat die Lösung

$$B_{\alpha,\beta} = \varrho \cdot (-\varrho)^{\alpha-1} \varrho^{\beta-1} \cdot \binom{\alpha+\beta-2}{\beta-1} \quad (D.19)$$

Die Anfangsbedingungen aus (17) werden erfüllt.

Eine explizite Lösung der C -Rekursion ist angesichts der verwickelten Startbedingungen aus (17) nicht sinnvoll. Die Vertauschung $M \leftrightarrow \Lambda$ in (9) liefert die Symmetrierelation:

$$G_{\alpha,\beta} = G_{\beta,\alpha}(M \leftrightarrow \Lambda) \cdot \varrho^{\alpha+\beta-1} \quad (D.20)$$

Weil $M \leftrightarrow \Lambda$ gleichbedeutend mit $(\zeta \leftrightarrow -\zeta \cdot \varrho, \varrho \leftrightarrow \varrho^{-1}, \epsilon \leftrightarrow (-\epsilon))$ ist, entstehen ähnliche Relationen zwischen den Polynomen $B_{\alpha,\beta}(\varrho)$ bzw. $C_{\alpha,\beta}(\varrho)$, die zur Rechenkontrolle dienen können:

$$\begin{cases} B_{\alpha,\beta}(\varrho) = B_{\beta,\alpha} \left(\frac{1}{\varrho} \right) \cdot (-1)^{\alpha+\beta} \cdot \varrho^{2(\alpha+\beta-1)} \\ C_{\alpha,\beta}(\varrho) = C_{\beta,\alpha} \left(\frac{1}{\varrho} \right) \cdot (-1)^{\alpha+\beta} \cdot \varrho^{2(\alpha+\beta-1)-1} \end{cases} \quad (D.21)$$

$$C_{\alpha,\beta}(\varrho) = \begin{matrix} & \alpha = 3 & \alpha = 4 \\ \beta = 4 & \left(\begin{array}{cc} [0^4, \frac{1}{2}, \frac{-9}{2}, \frac{-47}{6}, \frac{13}{6}, \frac{-1}{3}] & [0^4, \frac{1}{3}, \frac{-8}{3}, \frac{37}{3}, \frac{37}{3}, \frac{-8}{3}, \frac{1}{3}] \\ [0^3, \frac{1}{2}, \frac{-7}{2}, \frac{-7}{2}, \frac{1}{2}] & [0^3, \frac{1}{3}, \frac{-13}{6}, \frac{47}{6}, \frac{9}{2}, \frac{-1}{2}] \\ [0^2, \frac{1}{2}, \frac{-5}{2}, -1] & [0^2, \frac{1}{3}, \frac{-5}{3}, \frac{13}{3}, 1] \\ [0, \frac{1}{2}, \frac{-3}{2}] & [0, \frac{1}{3}, \frac{-7}{6}, \frac{11}{6}] \\ [\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}] & [\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3}] \end{array} \right) \end{matrix} \quad (D.23)$$

Nach (19) handelt es sich bei den Elementen von $B_{\alpha,\beta}(\varrho)$ ausschließlich um Monome:

$$B_{\alpha,\beta}(\varrho) = \begin{matrix} & \alpha = 0 & \alpha = 1 & \alpha = 2 & \alpha = 3 & \alpha = 4 \\ \beta = 4 & \left(\begin{array}{ccccc} [0] & [0^4, 1] & [0^5, -4] & [0^6, 10] & [0^7, -20] \\ [0] & [0^3, 1] & [0^4, -3] & [0^5, 6] & [0^6, -10] \\ [0] & [0^2, 1] & [0^3, -2] & [0^4, 3] & [0^5, -4] \\ \emptyset & [0, 1] & [0^2, -1] & [0^3, 1] & [0^4, -1] \\ \emptyset & \emptyset & [0] & [0] & [0] \end{array} \right) \end{matrix} \quad (\alpha, \beta \leq 4) \quad (D.24)$$

Wir erinnern außerdem daran, daß $G_{\alpha,\beta}^\gamma$ durch Eulers Beta-Funktion (siehe auch (4))

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \cdot \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \int_0^1 dt t^{x-1} (1-t)^{y-1} \quad (D.25)$$

und die hypergeometrische Reihe

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma; z) &= \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+\lambda)\Gamma(\beta+\lambda)\Gamma(\gamma) \cdot z^\lambda}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma+\lambda)\lambda!} \\ &= 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} \cdot z + \dots \end{aligned} \quad (D.26)$$

ausgedrückt werden kann:

$$\begin{aligned} G_{\alpha,\beta}^\gamma &= \varrho^\beta B(\gamma+1, \alpha+\beta-\gamma-1) \cdot F(\beta, \gamma+1, \alpha+\beta; 1-\varrho) \\ \text{sowie } G_{\alpha,\beta} &= \varrho^\beta B(1, \alpha+\beta-1) \cdot F(\beta, 1, \alpha+\beta; 1-\varrho) \end{aligned} \quad (D.27)$$

Der Beweis ist recht einfach. Nach der Substitution $x = tM^2/(1-t)$ in (9) entwickelt man den neuen Integranden in eine Reihe der Variablen $z = (1-\varrho)$. Die Koeffizienten sind geschlossen ausführbare Integrale $\int_0^1 dt \dots$.

D.3. 1-SCHLEIFEN-AMPLITUDE: ABLEITUNGSKOPPLUNGEN ALS VERTIZES

Ein zusammengesetztes $U(1)$ -Eichfeld $A^\mu = \frac{1}{v} \bar{\psi} i \vec{\sigma}^\mu \psi$ wurde in [3] diskutiert. Die klassische selbstgekoppelte Lagrangedichte enthält diese Definition in Form eines Lagrangemultiplikatorterms (siehe (5.9)). Fermion-Schleifendiagramme gestatten effektive Wechselwirkungen des Verbundfeldes A^μ und der Multiplikatorfelder λ_ν, λ untereinander. Insbesondere gilt nach (5.9) die Feynmanregel

$$-i(l_{(a)} + l_{(b)})^\mu \quad (D.28)$$

an einem λ_μ -Vertex der Schleife. l_a, l_b bezeichnen die 4-Impulse, welche längs der Spinorlinien ein- bzw. auslaufen. Wir wählen das 2-Punkt-Diagramm

$$\omega_{\mu\nu}^{(\lambda_\mu\lambda_\nu)}(p) = - \int \frac{d^4 l}{N} \text{tr}_D \left(\frac{i}{l + \frac{1}{2} \not{p} - m} (-i l^\mu) \frac{i}{l - \frac{1}{2} \not{p} - m} (-i l^\nu) \right) \Big|_{PV} \quad (D.29)$$

$$N := (2\pi)^4$$

(siehe (5.29d), um beispielhaft den Rechengang vorzustellen, an dessen Ende die Amplituden (5.31) stehen. Nachdem rationalisierte Propagatoren gebildet wurden und die Spur im Dirac-Raum ausgeführt worden ist, werden die beiden Nennerfaktoren im Zuge der Feynman-Parametrisierung

$$\frac{1}{A \cdot B} = \int_0^1 dx \frac{1}{(Ax + B \cdot (1-x))^2} \quad (D.30)$$

zusammengefaßt; wir gelangen dann zum Ausdruck

$$\omega_{\mu\nu}^{(\lambda_\mu\lambda_\nu)}(p) = -4 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 l}{N} \frac{l_\mu l_\nu (m^2 + l^2 - \frac{1}{4} p^2)}{(l^2 - m^2 + \frac{1}{4} p^2 + l p (2x - 1))^2} \Big|_{PV} \quad (D.31)$$

Als Nächstes verschiebt man den Schleifenimpuls: $\tilde{l} := l + p(x - \frac{1}{2})$. Wegen der PV-Regularisierung ändert diese Substitution den Wert des konvergenten Loop-Integrals nicht. Eine Wick-Rotation $l^0 \mapsto i l_4$ folgt anschließend. Die Vereinfachungen, welche die euklidische Raumwinkelintegration bietet, werden gleich genutzt (siehe (7), (8)). Es entsteht

$$\omega_{\mu\nu}^{(\lambda_\mu\lambda_\nu)}(p) = -\frac{i}{4\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^\infty du \quad (D.32)$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{\eta_{\mu\nu} (-\Delta + u) \cdot u^2 + p_\mu p_\nu (2x - 1)^2 \cdot u (\Delta - 2u)}{(u + \Delta)^2} \Big|_{PV}$$

wobei wir die Abkürzung

$$\Delta := m^2 - \frac{p^2}{4} (1 - (2x - 1)^2) \quad (\Delta|_{x=1} = \Delta|_{x=0} = m^2) \quad (D.33)$$

verwenden. Die Integrationsvariable u entspricht dem positiv definiten euklidischen Impulsquadrat. Das betreffende Integral bleibt beschränkt aufgrund von $1|_{PV} = 0, \Delta|_{PV} = 0$ sowie $\Delta^2|_{PV} = 0$; wir finden als Ergebnis

$$\begin{aligned} \omega_{\mu\nu}^{(\lambda_\mu\lambda_\nu)}(p) &= \frac{5i}{(4\pi)^2} \cdot \int_0^1 dx \left(\eta_{\mu\nu} \Delta^2 + p_\mu p_\nu (2x - 1)^2 \Delta \right) \ln \Delta|_{PV} \\ &=: \frac{5i}{(4\pi)^2} \left(\eta_{\mu\nu} f(p) - \Pi_{\mu\nu} p^2 \cdot g(p) \right) \Big|_{PV} \end{aligned} \quad (D.34a)$$

wobei

$$f(p) = \int_0^1 dx \Delta \left(\Delta + p^2(2x-1)^2 \right) \ln \Delta|_{pV} \quad (D.34b)$$

$$g(p) = \int_0^1 dx (2x-1)^2 \cdot \Delta \cdot \ln \Delta|_{pV} \quad (D.34c)$$

Die Identität $\frac{d}{dx} \Delta = p^2(2x-1)$ erlaubt es, $f(p)$ durch partielle Integrationen auszuwerten:

$$\begin{aligned} f(p) &= \int_0^1 dx \frac{d}{dx} \left(\left(x - \frac{1}{2}\right) \Delta^2 \right) \ln \Delta|_{pV} \\ &= R_5(4) - 2p^2 \int_0^1 dx \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot \Delta|_{pV} = R_5(4) \end{aligned} \quad (D.35)$$

Wir haben uns der Bezeichnung (B.9) für die gewichteten Spektralsummen

$$\left(\sum_{i=1}^5 \ell_i \ln \left(\frac{\Lambda_i^2}{m^2} \right) \cdot \Lambda_i^e \right)$$

bedient.

Zur weiteren Behandlung von $g(p)$ greifen wir erneut zu partieller Integration im ersten Faktor:

$$\begin{aligned} g(p) &= \frac{1}{3} R_5(2) - \frac{p^2}{6} \int_0^1 dx (2x-1)^4 \ln \Delta \\ &= \frac{1}{3} \left(R_5(2) - \frac{p^2}{2} \int_0^1 dy \cdot y^4 \ln \left(m^2 - \frac{p^2}{4} + \frac{p^2}{4} y^2 \right) \right) \end{aligned} \quad (D.36)$$

Eine abermalige partielle Integration, der eine Partialbruchzerlegung folgt, führt zum Ziel:

$$g(p) = \frac{1}{3} \left(R_5(2) - \frac{p^2}{5} \left\{ \frac{1}{2} R_5(0) + w^4 (\operatorname{warccot} w - 1) + \frac{w^2}{3} - \frac{1}{5} \right\} \right) \quad (D.37a)$$

$$w(p) = \sqrt{-1 + \frac{4m^2}{p^2}} \quad (D.37b)$$

Es gilt zunächst die Einschränkung $0 \leq p^2 < 4m^2$. Analytische Fortsetzung eröffnet jedoch die komplexe p^2 -Ebene mit Ausnahme des Schnittes $[4m^2, \infty)$ oberhalb der Paarerzeugungsschwelle (siehe dazu [5] S. 323).

Wenn man die für $f(p), g(p)$ gefundenen Lorentz-Skalare (35), (37a) in die Zerlegung (34a) einsetzt, kann der unter (5.31) angegebene Ausdruck für die Amplitude $\omega_{\mu\nu}^{(\lambda_\mu \lambda_\nu)}(p)$ bestätigt werden.

Die effektive Wirkung (5.16) besitzt eine $U(1)$ -Eichinvarianz. Das Multiplikatorfeld λ_μ ist von lokalen Phasentransformationen aber nicht betroffen. Es scheint daher keinen ersichtlichen Grund zu geben, weshalb der p -abhängige Teil der Amplitude $\omega_{\mu\nu}^{(\lambda_\mu \lambda_\nu)}(p)$ sogar ein transversaler Tensor ist (siehe (34a), beachte daneben das Gegenbeispiel (4.32)). Der nicht-orthogonale Beitrag

$\{\frac{5i}{(4\pi)^2}\eta_{\mu\nu}R_5(4)\}$ läßt sich auf sehr einfache Weise durch Kontraktion der Amplitude (29) mit dem äußeren Impulsvektor gewinnen, wenn man die Identität

$$p \cdot l = \frac{1}{2}(l_+ - m)\not{p} + \frac{1}{2}\not{p}(l_- - m) + m\{(l_+ - m) - (l_- - m)\}$$

$$l_{\pm} = l \pm \frac{1}{2}p \quad (D.38)$$

nutzt.

$$\Rightarrow p^\mu \omega_{\mu\nu}^{(\lambda_\mu \lambda_\nu)}(p) = - \int \frac{d^4 l}{N} l_\nu \text{tr}_D \left\{ \frac{\not{p}}{2} \cdot \left(\frac{1}{l_+ - m} + \frac{1}{l_- - m} \right) \right. \\ \left. + m \cdot \left(\frac{1}{l_- - m} - \frac{1}{l_+ - m} \right) \right\} \Big|_{PV} \quad (D.39)$$

$$= - \int \frac{d^4 l}{N} \text{tr}_D \left(\frac{1}{l_- - m} \not{p} \cdot l_\nu + m \cdot \frac{1}{l_- - m} \cdot p_\nu \right) \Big|_{PV}$$

Geeignete Translationen des Schleifenimpulses waren möglich, da alle Terme des Integranden nach der Regularisierung beschränkt bleiben.

Auf Spurbildung und Wick-Rotation folgt noch eine mühelose l -Integration (es blieb ein einzelner Propagatornenner übrig) und darauf entsteht:

$$p^\mu \omega_{\mu\nu}^{(\lambda_\mu \lambda_\nu)}(p) = p^\mu \cdot \left(\frac{5i}{(4\pi)^2} \eta_{\mu\nu} \cdot R_5(4) \right) \quad (D.40)$$

Diese Herleitung verdeutlicht zum zweiten Mal, daß $\{\omega_{\mu\nu}^{\lambda_\mu \lambda_\nu}(p) - \omega_{\mu\nu}^{\lambda_\mu \lambda_\nu}(0)\}$ einen transversalen Tensor darstellt.

Anhang E. Kriterien für die Eichinvarianz der effektiven Wirkung

E.1. LOKALE $U(1)$ -INVARIANZ

Ein Kennzeichen für die Eichinvarianz einer effektiven Wirkung S_{eff} wird gesucht. Wir gehen von einer Lagrangedichte $\mathcal{L}$ aus, welche sich als Bilinearform in einem Diracfeld ψ und seinem adjungierten Feld $\bar{\psi}$ angeben läßt.

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{D} - m + U)\psi \quad (\not{D} = \not{\partial} + i\not{A}) \quad (E.1)$$

$\mathcal{L}$ enthält Kopplungen an das Vektorpotential A^μ sowie weitere bosonische Hintergrundfelder, die in der (4×4) -Dirac-Matrix U zusammengefaßt sind. Mit der in Kapitel 3 erläuterten Pfadintegraldarstellung des erzeugenden Funktionals von Greenfunktionen gelangt man zur effektiven Wirkung

$$S_{eff} = -i \text{Tr} \ln(i\not{D} - m + U) + i \text{Tr} \ln(i\not{\partial} - m) \quad (E.2)$$

der bosonischen Felder, weil das Grassmann-Funktionalintegral $\int D\bar{\psi} D\psi$ im Fall (1) geschlossen behandelt werden kann.

Wir verwenden die Bezeichnung

$$\Delta = (i\partial - m) \quad (E.3)$$

für den freien kinetischen Operator in der Potenzreihenentwicklung

$$S_{eff} = i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{Tr} \left\{ \frac{1}{\Delta} (A - U)^n \right\} \quad (E.4)$$

Divergente Reihenglieder müssen durch geeignete Regularisierung definiert werden.

Unter einer infinitesimalen lokalen Phasentransformation entstehen die Variationen

$$\begin{cases} \delta A_\mu = \alpha_{,\mu} \\ \delta U \end{cases} \quad (E.5)$$

Wir ermitteln nun eine Forderung an δU , so daß S_{eff} eine lokal $U(1)$ -invariante Wirkung darstellt. Offenbar ist

$$\delta S_{eff} = \sum_{n=1}^{\infty} \text{Tr} \left\{ \frac{1}{\Delta} (i\partial_\mu - i\delta U) \left(\frac{1}{\Delta} (A - U) \right)^{n-1} \right\} \quad (E.6)$$

wegen der zyklischen Eigenschaft der Spur, die hier im Dirac-Raum und bezüglich der Raum-Zeit-Koordinaten stattfindet. Die Beziehung^[24]

$$i(\partial\alpha) = \Delta\alpha - \alpha\Delta \quad (E.7)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\Delta} (i\partial\alpha) \frac{1}{\Delta} = \alpha \frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\Delta} \alpha$$

entspricht der QED-Ward-Identität niedrigster Ordnung zur Vertexfunktion. Mit ihrer Hilfe setzen wir die Untersuchung von (6) fort:

$$\begin{aligned} \delta S_{eff} &= \sum_{n=1}^{\infty} \text{Tr} \left\{ \frac{1}{\Delta} (-i\delta U) \left(\frac{1}{\Delta} (A - U) \right)^{n-1} \right\} \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} \text{Tr} \left\{ \left(\frac{1}{\Delta} \{-\alpha(A - U) + (A - U)\alpha\} \right) \left(\frac{1}{\Delta} (A - U) \right)^{n-2} \right\} \end{aligned} \quad (E.8)$$

$\Rightarrow$

$$i\delta U = [\alpha, U] \quad (E.9)$$

sorgt für eine eichinvariante effektive Wirkung S_{eff} . Damit kann (5) vervollständigt werden.

[24] Die gewählte Regularisierung sollte mit ihr verträglich sein. Die Pauli-Villars-Methode (siehe Anhang B) gehört dazu.

Auch endliche $U(1)$ -Transformationen von A^μ bzw. des Funktionals U sind jetzt zugänglich:

$$A_\mu \mapsto A_\mu^{(\alpha)} = A_\mu + \alpha_{,\mu} \quad (E.10)$$

bleibt linear. Schließlich erhalten wir mit der Abkürzung

$$[-i\alpha, [-i\alpha, \dots [-i\alpha, U], \dots],] \underset{n\text{-mal}}{=} C_n(\alpha) \quad U := C_0(\alpha) \quad (E.11)$$

für einen Mehrfachkommutator das transformierte Funktional $U^{(\alpha)}$ als Grenzwert

$$U_{(\alpha)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=0}^m C_k\left(\frac{\alpha}{m}\right) \binom{m}{k} \right\} \quad (E.12)$$

Wegen $\lim_{m \rightarrow \infty} (C_k(\frac{\alpha}{m}) \cdot \binom{m}{k}) = C_k(\alpha) \cdot \frac{1}{k!}$ für festes k und der absoluten Konvergenz der Folge in (12) (beachte: $\frac{1}{m^k} \binom{m}{k} < \frac{1}{k!}$) finden wir

$$U_{(\alpha)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k(\alpha)}{k!} = e^{-i\alpha(x)} U e^{i\alpha(x)} \quad (E.13)$$

Demnach verhält sich dasjenige Argument des $\text{Tr} \ln$ -Funktionals in (2), an dem die bosonischen Felder beteiligt sind, bei einer lokalen $U(1)$ -Phasentransformation wie folgt:

$$\begin{aligned} i\mathcal{D} - m + U &\mapsto i\mathcal{D} - \partial\alpha - m + e^{-i\alpha(x)} U e^{i\alpha(x)} \\ &= e^{-i\alpha(x)} (i\mathcal{D} - m + U) e^{i\alpha(x)} \end{aligned} \quad (E.14)$$

Geht man dann von der funktionalen Identität (siehe (3.30))

$$\text{Tr} \ln = \ln \text{Det}$$

sowie der zyklischen Eigenschaft einer Determinante aus, so findet die Invarianz der effektiven Wirkung bereits anhand des Ausdrucks (2) ihre Bestätigung.^[25]

Sowohl die Summe als auch das Produkt zweier bosonischer Wechselwirkungskerne U_1, U_2 in eichinvarianten effektiven Wirkungen vom Typ (4) genügen erneut den Bedingungen (9) bzw. (13). Daher eignen sich alle Funktionen U , die in den kovarianten Variablen $\overline{D}_\mu, \overline{D}_\mu$ (oder auch $\overline{D}_\mu$) und in den übrigen nicht transformierenden Hintergrundfeldern analytisch sind dazu, um lokal $U(1)$ -invariante effektive Theorien zu konstruieren.

Der Sonderfall $U = 0$ ergibt die 1-Schleifen-Näherung der Quantenelektrodynamik (QED). Die veränderte Amati-Modelltheorie (5.50) besitzt die effektive Wirkung^[26]

$$\mathcal{S}_{eff}^{(Am_2)} = -i \text{Tr} \ln \left\{ i\mathcal{D} - m - \lambda^\mu i\overline{D}_\mu \right\} \quad (E.15)$$

^[25](14) wird in [5] zum formalen Nachweis der $U(1)$ -Eichinvarianz herangezogen. Wir haben die Verbindung mit der Invarianz der wohldefinierten Reihenentwicklung des Wirkungsfunktional geknüpft.

^[26] $\overline{D}_\mu$ vertauscht hier mit λ^μ .

Selbstverständlich befolgt $U = -\lambda^\mu i \vec{D}_\mu$ das Transformationsgesetz (13), da das Multiplikatorfeld λ_μ von einer Umeichung nicht betroffen ist; mithin ist $S_{eff}^{(Am_2)}$ $U(1)$ -eichinvariant. In der ursprünglichen Form (5.16) (siehe [3]) traten in der effektiven Wirkung noch klassische bosonische Kontaktterme auf:

$$S_{eff}^{(Am)} = -i \text{Tr} \ln (i \vec{D} + \lambda - \lambda^\mu i \vec{\partial}_\mu) + \int d^4x (-\lambda + \lambda_\mu A^\mu) \cdot v \quad (E.16)$$

Wir entnehmen

$$U_{(Am)} = \lambda - \lambda_\mu i \vec{\partial}^\mu = -\lambda_\mu i \vec{D}^\mu + (\lambda - \lambda_\mu A^\mu) \quad (E.17)$$

damit erhält man nach (9) die Bedingung

$$\delta\lambda - \delta\lambda_\mu i \vec{\partial}^\mu - \lambda_\mu \alpha'^\mu = 0 \quad (E.18)$$

an die Variationen der beiden Multiplikatorfelder λ, λ_μ . Die eindeutige Lösung lautet

$$\begin{cases} \delta\lambda = \lambda^\mu \alpha_{,\mu} \\ \delta\lambda^\mu = 0 \end{cases} \quad (E.19)$$

womit gleichzeitig die Eichinvarianz der klassischen Kontaktterme verbunden ist.

Ohnehin entspricht (19) unserer Erwartung, weil die Substitution

$$\lambda \mapsto \lambda_\mu A^\mu \quad (E.20)$$

von (17) zur Modelltheorie (15) führt.

Statt mit Dirac-Propagatoren in den 1-Schleifen-Diagrammen zu arbeiten, kann man auch ein geladenes Skalarfeld φ zugrundelegen, das verschiedene bilineare Wechselwirkungen mit bosonischen Hintergrundfeldern eingeht.

Die Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_s = |D_\mu \varphi|^2 - m^2 |\varphi|^2 + \varphi^* U_s \varphi \quad D_\mu = \partial_\mu + i A_\mu \quad (E.21)$$

(U_s steht für einen reellen Lorentz-Skalar-Operator) besitzt als 1-Schleifen-Quantenkorrektur die effektive Wirkung

$$S_{eff}^{(s)} = \frac{i}{2} \text{Tr} \ln \{ -D_\mu D^\mu + U_s - m^2 \} - \frac{i}{2} \text{Tr} \ln \{ -\square - m^2 \} \quad (E.22)$$

Der geschlossene Ausdruck für den Logarithmus des Funktionalintegrals

$$\int \mathcal{D}\varphi^* \int \mathcal{D}\varphi \exp(i \int d^4x \mathcal{L}_s)$$

in der Pfadintegraldarstellung ist dem Gauß-artigen Integranden zu verdanken.

Die Reihenentwicklung um den freien skalaren kinetischen Operator

$$G = -\square - m^2 \quad (E.23)$$

verbunden mit der Wahl einer Regularisierung definiert schließlich die 1-Schleifen-Wechselwirkungen

$$\mathcal{S}_{eff}^{(s)} = -\frac{i}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{Tr} \left\{ \left\{ \frac{1}{G} (-U_s - A_\mu A^\mu + i A^\mu \partial^\mu + i \partial_\mu A^\mu) \right\}^n \right\} \quad (E.24)$$

(die Spurbildung bezieht sich an dieser Stelle auf die Raum-Zeit-Koordinaten)

Die Variation dieses Funktional bei einer $U(1)$ -Eichtransformation beträgt

$$\delta \mathcal{S}_{eff}^{(s)} = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \text{Tr} \left\{ \frac{1}{G} (-i \delta U_s - 2i A^\mu \alpha_{,\mu} - \alpha_{,\mu} \partial^\mu - \partial^\mu \alpha_{,\mu}) \cdot \left(\frac{1}{G} (-U_s - A_\mu A^\mu + i A_\mu \partial^\mu + i \partial^\mu A_\mu) \right)^{n-1} \right\} \quad (E.25)$$

Als klassische Ward-Identität steht

$$\frac{1}{G} (-\alpha_{,\mu} \partial^\mu - \partial^\mu \alpha_{,\mu}) \frac{1}{G} = \alpha \cdot \frac{1}{G} - \frac{1}{G} \cdot \alpha \quad (E.26)$$

zur Verfügung. Sie bezieht sich auf die Ableitungskopplung der skalaren Elektrodynamik (SED).

Vergleichen wir mit den entsprechenden Beziehungen (6) und (7) aus der Theorie eines fundamentalen Dirac-Spinorfeld ψ , so herrscht formale Übereinstimmung, sobald

$$\begin{aligned} (\mathcal{A} - U) \quad \text{und} \quad \{(-U_s - A^\mu A_\mu) + i A_\mu \partial^\mu + i \partial^\mu A_\mu\} \\ \text{bzw.} \quad \delta U \quad \text{und} \quad \{\delta U_s + 2 A^\mu \alpha_{,\mu}\} \end{aligned}$$

einander gleichgesetzt werden. Durch diese Ersetzungen gewinnt man aus (9) die Bedingung

$$i \delta U_s = [\alpha, U_s] \quad (E.27)$$

welche gelten muß, damit $\mathcal{S}_{eff}^{(s)}$ unter lokalen Phasentransformationen invariant ist.

Der triviale Fall $U_s = 0$ in (21) bedeutet SED. E. Witten benutzt in [17] ein fundamentales Skalarfeld φ , um ein zusammengesetztes Vektorpotential A^μ zu konstruieren. Die von ihm gewählte Lagrangedichte fällt unter die Klasse (21). Der Lagrangemultiplikatorterm

$$\mathcal{L}_M = \int d^4x \lambda_\mu \left(\varphi^* (-i \vec{D}^\mu) \varphi \right) \quad (E.28)$$

enthält die Zwangsbedingung

$$A_\mu = \frac{\varphi^* (i \vec{D}_\mu) \varphi}{\varphi^* \varphi} \quad (\varphi^* \varphi \neq 0) \quad (E.29)$$

wonach A^μ tatsächlich das inhomogene Transformationsgesetz des Photonfeldes annimmt. Die effektive Wirkung eines derartigen Vektorfeldes A^μ , das minimal an das geladene Skalarfeld φ koppelt, geht aus (22) hervor:

$$\mathcal{S}_{eff}^{(s)} = \frac{i}{2} \text{Tr} \ln \left\{ i \vec{D}_\mu \cdot i \vec{D}^\mu - m^2 - \lambda_\mu i \vec{D}^\mu \right\} \quad (E.30)$$

Eine quadratische Ergänzung des $\text{Tr} \ln$ -Arguments bietet sich an; die Verschiebung $A^\mu \mapsto (A^\mu - \frac{1}{2}\lambda^\mu)$ bewirkt:

$$\mathcal{S}_{eff}^{(s)} = \frac{i}{2} \text{Tr} \ln \left\{ (i\overline{D}_\mu)^2 - m^2 - \frac{1}{4}\lambda_\mu\lambda^\mu \right\} \quad (E.31)$$

Es liegt die effektive Wirkung der SED erweitert um eine Massenterm-Kopplung an das Skalarfeld $(\lambda_\mu\lambda^\mu)$ vor. Demnach können wir auf die Zwangsbedingung (28) verzichten. Im Nachhinein wird uns der Grund klar: bei der Euler-Feldgleichung zur Variation der SED nach dem 4-Potential-Hilfsfeld A^μ handelt es sich schon um die Zwangsbedingung (29). Auf diesen Umstand hat Witten in [17] ebenfalls hingewiesen.

E.2. LOKALE NICHTABELSCHE EICHINVARIANZ

Eine infinitesimale Umeichung bedeutet für eine Yang-Mills-Konnektion

$$\delta A_\mu = i[A_\mu, M] + \partial_\mu M(x) \quad (E.32)$$

wobei A^μ seine Werte in der Lie-Algebra der betreffenden nicht-abelschen Eichgruppe annimmt und $M(x)$ eine beliebige infinitesimale Abbildung in dieselbe Lie-Algebra darstellt.

In Operatorschreibweise erhält man die Verallgemeinerung von (7):

$$i\delta\mathcal{A} = (\Delta - \mathcal{A})M(x) - M(x)(\Delta - \mathcal{A}) \quad (E.33)$$

Die Eichvariation der effektiven 1-Schleifen-Wirkung

$$\mathcal{S}_{eff} = -i\text{Tr} \ln \left\{ 1 - \frac{1}{\Delta}(\mathcal{A} - U) \right\} \quad (E.34)$$

deren $\text{Tr} \ln$ -Argument im Unterschied zu (4) jetzt der Gruppen-Lie-Algebra angehört, lautet demnach:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S}_{eff} = & \sum_{n=1}^{\infty} \text{Tr} \left\{ \frac{1}{\Delta} ([M, \mathcal{A}] - i\delta U) \left(\frac{1}{\Delta}(\mathcal{A} - U) \right)^{n-1} \right\} \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \text{Tr} \left\{ \frac{1}{\Delta} ((\mathcal{A} - U)M - M(\mathcal{A} - U)) \cdot \left(\frac{1}{\Delta}(\mathcal{A} - U) \right)^{n-2} \right\} \end{aligned} \quad (E.35)$$

$\Rightarrow$ Die kovariante Bedingung

$$i\delta U = [M, U] \quad (E.36)$$

für das Eichverhalten der übrigen Materiekopplungen des funktional-integrierten Spinorfeldes stellt die lokale Invarianz der effektiven Wirkung formal sicher. Globale Umeichungen entstehen, wenn man eine wachsende Zahl von Gruppentransformationen, die einer immer kleiner werdenden Umgebung der Einheit entnommen werden, hintereinander ausführt (vgl. (13)):

$$U(x) \mapsto e^{-iM(x)}U(x)e^{iM(x)} \quad (E.37)$$

Im Falle divergenter Wechselwirkungs-Amplituden bedient man sich der PV-Regularisierung, ohne daß die Form der Identität (33) davon berührt wird.

Anhang F. Nichtabelsche Eichtheorie

F.1. DIE 1-SCHLEIFEN-BEITRÄGE MIT OPERATOREN DER DIMENSION 6

In der Entwicklung (6.32) der effektiven Wirkung, welche auf den reinen Eichfeldsektor eingeschränkt ist, bezeichnet G_6 alle Wechselwirkungen, die die Skalendimension 6 tragen. Aufgrund der Überlegungen aus Abschnitt (6.2.2) wissen wir, daß G_6 ein lokal $SU(2)$ -invarianter Lorentzskalar ist. Deswegen genügt es, allein die Kopplung $\overline{G}_6$ von sechs konstanten Yang-Mills-Feldern A_μ^i in der 1-Schleifen-Näherung zu bestimmen; denn, wie sich herausstellt, besitzt $\overline{G}_6$ genau eine eichinvariante Erweiterung, indem man Terme die partielle Ableitungen des Eichfeldes enthalten, einbezieht.

Wir beschäftigen uns also zunächst mit

$$\overline{G}_6 = \frac{1}{6} \int d^4x \operatorname{tr}_I \left(\prod_{i=1}^6 A_{\mu_i} \right) \sum_A i \int \frac{d^4l}{N} \operatorname{tr} \left(\prod_{i=1}^6 \mathcal{D}(l; m_A) \gamma^{\mu_i} \right) \quad (F.1)$$

$$\mathcal{D}(l; m_A) = (l - m_A)^{-1}$$

Das Schleifenintegral konvergiert absolut. Sobald man die längliche Dirac-Spur ausgeführt und eine Wick-Drehung zur euklidischen Metrik erledigt hat, kann es nach Anhang (D.2), wo wir die Raumwinkel-Teilintegration besprechen, in ein 1-dimensionales Radialintegral verwandelt werden, das leicht zu bewältigen ist. Am Ende dieser Rechnungen findet man:

$$\overline{G}_6 = \frac{\sum (m_A^{-2})}{45 \cdot (4\pi)^2} \int d^4x \left\{ -13 \cdot \operatorname{tr}_I(A^2 A^2 A^2) - 12 \cdot \operatorname{tr}_I(A^2 A_\alpha A^2 A_\alpha) \right. \quad (F.2)$$

$$+ 51 \cdot \operatorname{tr}_I(A^2 A_\alpha A_\beta A^\alpha A^\beta) +$$

$$\left. + 1 \cdot \operatorname{tr}_I(A_\alpha A_\beta A_\gamma A^\alpha A^\beta A^\gamma) - 27 \cdot (A_\alpha A_\beta A_\gamma A^\beta A^\alpha A^\gamma) \right\}$$

Es ist kein Zufall, daß die Koeffizientensumme S aller Isospin-Spuren verschwindet. Da sich bei der parallelen Behandlung eines abelschen $U(1)$ -Eichpotentials keine Unterschiede zeigen und lediglich die Isospin-Spur fortfällt, bleibt auch S unverändert. Die $U(1)$ -Eichvariation

$$\delta \int d^4x (A^2)^3 = 6 \int d^4x (A^2)^2 A^\sigma \alpha_{,\sigma}$$

wird jedoch von anderen effektiven Wechselwirkungen des Photonfelds nicht mehr wettgemacht. Deshalb besteht $S = 0$, was als Rechenkontrolle nützlich ist.

Unser gesuchtes Funktional G_6 , das bei Einschränkung auf konstantes Yang-Mills-Potential in $\overline{G}_6$ übergeht, wird bezüglich einer Basis $\{B_i\}$ reeller, $SU(2)$ -eichinvarianter Isospin-Spuren der Operator-Dimension 6 zerlegt. Gelingt diese Linearkombination nur soweit, daß sich noch ein Raum-Zeit-Integral einer 4-Divergenz der Zerlegung entzieht, so soll uns dies nicht stören. Wir gehen auch davon aus, daß sämtliche Basiselemente unter der Isospin-Spur nur Produkte des kovarianten Feldstärkentensors $F_{\mu\nu}$ und seiner $SU(2)$ -kovarianten Ableitungen $[D_\alpha, F_{\beta\gamma}]$ etc.

besitzen.^[27] Natürlich ist diese Forderung hinreichend, um $SU(2)$ -eichinvariante B_i zu gewinnen. Einen allgemeinen Beweis ihrer Notwendigkeit habe ich bisher nicht gefunden. Sicherlich kann man einen Algorithmus entwickeln, der eine maximale Zahl unabhängiger Elemente B_i liefert; jedoch wächst der Aufwand, um ihn durchzuführen, rasch mit steigender Operatorprodukt-Dimension.

Die eben getroffenen Annahmen ergeben z. B. die zweielementige Basis

$$\begin{aligned} B &= \{B_1, B_2\} \\ B_1 &= \int d^4x \operatorname{tr}_I \left([D_\alpha, F_{\beta\gamma}] \cdot [D^\alpha, F^{\beta\gamma}] \right) \\ B_2 &= \int d^4x \operatorname{tr}_I \left([D^\alpha, F_{\alpha}{}^\sigma] \cdot [D^\beta, F_{\beta\sigma}] \right) \end{aligned} \quad (F.3)$$

Jeder andere Kandidat stellt sich entweder als trivial heraus (wegen $\operatorname{tr}_I([X, Y]) = 0$) oder gehört dem von B aufgespannten $\mathbf{R}$ -Vektorraum an, wie man mit Hilfe der Bianchi-Identität

$$[D_\alpha, F_{\beta\gamma}] + [D_\beta, F_{\gamma\alpha}] + [D_\gamma, F_{\alpha\beta}] = 0 \quad (F.4)$$

oder der partiellen Integrationsregel

$$\int d^4x \operatorname{tr}_I ([D_\alpha, X] Y) = - \int d^4x \operatorname{tr}_I (X [D_\alpha, Y]) \quad (F.5)$$

ermittelt. Zum Beispiel gilt

$$i \int d^4x \operatorname{tr}_I \left\{ F_{\alpha\beta} F^{\beta\gamma} F_\gamma^\alpha \right\} = -\frac{1}{4} B_1 + \frac{1}{2} B_2$$

Der Sonderfall eines konstanten Yang-Mills-Felds A^μ bedeutet:

$$\begin{aligned} \bar{B}_1 = B_1 \Big|_{A^\mu = \text{const}} &= \int d^4x \operatorname{tr}_I \left\{ 4A^2 A_\alpha A^2 A^\alpha - 4A^2 A_\alpha A_\beta A^\alpha A^\beta \right. \\ &\quad \left. + 4A_\alpha A_\beta A_\gamma \cdot (A^\alpha A^\beta A^\gamma - A^\beta A^\alpha A^\gamma) \right\} \end{aligned} \quad (F.6)$$

$$\begin{aligned} \bar{B}_2 = B_2 \Big|_{A^\mu = \text{const}} &= \int d^4x \operatorname{tr}_I \left\{ 2 \cdot A^2 A^2 A^2 + 2A^2 A_\alpha A^2 A^\alpha \right. \\ &\quad \left. - 8A^2 A_\alpha A_\beta A^\alpha A^\beta + 4A_\alpha A_\beta A_\gamma A^\beta A^\alpha A^\gamma \right\} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$G_6(A_\mu) = \frac{\sum (m_A^{-2})}{45 \cdot (4\pi)^2} \cdot \frac{1}{4} \{ 1 \cdot B_1 - 26 \cdot B_2 \} \quad (F.7)$$

Dieses Ergebnis steht noch unter dem Vorbehalt, daß kein zweites, ebenfalls eichinvariantes Funktional G'_6 existiert, welches zwar für konstant gehaltenes Feld A^μ mit G_6 übereinstimmt, sich sonst jedoch von G_6 unterscheidet.

Wir beschäftigen uns im nächsten Abschnitt eingehend mit den Schwachstellen, die während unserer Herleitung von (7) auftraten.

^[27] Da die minimale Kopplung des Yang-Mills-Felds die Parität nicht verletzt, kann der duale Feldstärkentensor $*F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$ in dieser Aufzählung wegfallen.

F.2. DIE FUNKTIONALE FORM DER 1-SCHLEIFEN-WIRKUNG IM YANG-MILLS-SEKTOR

Folgendes Ergebnis wurde im Anhang Teil E.2 erreicht: unter lokalen Eichtransformationen

$$\delta A_\mu(x) = [D_\mu, M(x)] \quad (M(x) \in \text{Lie-Algebra}) \quad (F.8)$$

des Yang-Mills-Vektorpotentials A^μ kommt es zu keiner Veränderung der effektiven Lagrange-dichte

$$S_{YM}(A_\mu) = -i \text{Tr} \ln \left\{ 1 - \frac{1}{(i\partial - m)} A \right\} \quad (F.9)$$

(Die oberflächlich divergenten Amplituden-Koeffizienten der Taylor-Reihen-Entwicklung nach wachsenden Potenzen des Eichfelds A^μ werden mit Hilfe des Pauli-Villars-Verfahrens reguliert)

Benutzen wir für die induzierten Wechselwirkungen, die die Skalendimension d tragen, die Bezeichnung $S_{(d)}(A^\mu)$, dann läßt sich S_{YM} als

$$S_{YM} = \sum_{b=2}^{\infty} S_{(2b)}(A^\mu) \quad (F.10)$$

darstellen, denn der Vektorcharakter von A^μ , ∂_ν schließt Selbstkopplungen mit ungeradzahligem d aus. $S_{(2)}$ fehlt ebenso, weil die Nichtvertauschbarkeit der Gruppenelemente hier noch keine Rolle spielt und man sich deshalb der Eigenschaften der effektiven Wirkung für die minimal gekoppelte $U(1)$ -Konnektion bedienen kann (kein Massenterm, Furry-Theorem).

Wegen (8) muß jedes Funktional $S_{(2b)}(A^\mu)$ einzeln eichinvariant sein. Berücksichtigt man noch, daß $S_{(2b)}$ in Beiträge mit verschieden hoher Zahl ϵ partieller Ableitungen zerfällt, die wir $Q_{(2b;\epsilon)}$ nennen wollen ($0 \leq \epsilon \leq (2b-1)$), so kann

$$S_{(2b)}(A^\mu) = \sum_{\epsilon=0}^{2b-1} Q_{(2b;\epsilon)}(A^\mu) \quad (F.11)$$

geschrieben werden. Ohne Schwierigkeit finden wir den expliziten Ausdruck

$$\begin{aligned} \delta_K^{(4)}(0) \cdot Q_{(2b;0)}(A^\mu) &= \frac{1}{2b} \text{Tr}_I \{ A_{\mu_1} A_{\mu_2} \cdots A_{\mu_{2b}} \} \cdot F^{\mu_1, \dots, \mu_{2b}} \\ \text{mit } F^{\mu_1, \dots, \mu_{2b}} &= i \int \frac{d^4 l}{N} \text{tr}_D \left\{ \prod_{a=1}^{2b} (\mathcal{D}(l; m) \gamma^{\mu_a}) \right\} \Big|_{PV} \end{aligned} \quad (F.12)$$

(die erste Spur bezieht sich auf die kontinuierlichen Raum-Zeit-Koordinaten sowie den Isospin-Index, $\delta_K^{(4)}(0) = \int \frac{d^4 p}{N} \cdot 1$).

Hat man ein konstantes Hintergrund-Eichpotential A^ν , dann gilt bereits

$$\overline{S_{YM}}(A^\mu) = S_{YM}(A^\mu) \Big|_{A^\mu = \text{const}} = \sum_{b=2}^{\infty} Q_{(2b;0)} \quad (F.13)$$

abgesehen von der Divergenz des Raum-Zeit-Integrals, die der nichtkompakte Träger von A^μ verursacht.

Die Behandlung eines konstanten Lie-Algebra-wertigen A^μ reicht schon, um die effektive Yang-Mills-Wirkung im allgemeinen Fall zu gewinnen. Wir behaupten, daß die formale Ersetzung

$$A_\lambda \mapsto -iD_\lambda = -i\partial_\lambda + A_\lambda \quad (F.14)$$

das Funktional $S_{(2b)}(A^\mu)$ liefert, wenn man sie in $Q_{(2b;0)}$ anwendet:

$$\delta_K^{(4)}(0)S_{(2b)}(A^\mu) = \frac{(-1)^b}{2b} \text{Tr}_I \{ D_{\mu_1} D_{\mu_2} \cdots D_{\mu_{2b}} \} \cdot F^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_{2b}} \quad (F.15)$$

Darin soll die Kontraktion mit dem konstanten Tensor $F^{\mu_1 \cdots \mu_{2b}}$, der eine Summe von $(2b)$ -stufigen Produkten des Minkowski-Tensors $\eta^{\alpha\beta}$ sein muß, zuerst stattfinden. Wir wählen eine Impulsraum-Basis, um Tr_I anzugeben :

$$\begin{aligned} & (-1)^b \delta_K^{(4)}(0)S_{(2b)}(A^\mu) \\ &= \frac{1}{2b} \int d^4 r \prod_{k=1}^{2b} \frac{d^4 p^{(k)}}{N} \delta^{(4)}(p^{(1)} + \cdots + p^{(2b)}) \cdot F^{\mu_1, \dots, \mu_{2b}} \\ & \cdot \text{tr}_I \left\{ \prod_{w=1}^{2b} \left(-i \left(r - \sum_{v=2}^w p^{(v)} \right)_{\mu_w} \cdot \delta^{(4)}(p^{(w)}) \cdot N + i A_{\mu_w}(p^{(w)}) \right) \right\} \end{aligned} \quad (F.16)$$

Die rechte Seite ist wohldefiniert, d. h. als singulärer Koeffizient wird nur $\delta_K^{(4)}(0)$ nach der r -Integration auftreten.

Wir ordnen die verschiedenen Produkte aus Impulsfaktoren und Lie-Algebra-wertigen Feldern A^μ , welche in der Isospin-Spur von (16) erscheinen, in Äquivalenzklassen $\Gamma_{(\vec{\pi}; t)}$ ein. Diese enthalten t Yang-Mills-Faktoren $A_{\mu\pi_\nu}(p^{(\pi_\nu)})$ sowie $(2b - t)$ Impulsoperator-Matrixelemente des Typs $(r - \sum_{v=2}^w p^{(v)})\delta(p^{(w)})$. Ihre relative Anordnung unter tr_I entnimmt man der geordneten Menge $\vec{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_t)$ ($\pi_i \in \mathbb{N}$ bilden eine streng monoton wachsende Folge); wenn die Differenz zweier solcher Vektoren $\vec{\pi}_a, \vec{\pi}_b$ lediglich ein Vielfaches von $(1, 1, \dots, 1) \bmod(2b)$ beträgt, sollen sie derselben Klasse $\Gamma_\sim$ angehören.

$$\begin{aligned}
\delta_K^{(4)}(0) S_{(2b)}(A^\mu) &= \frac{1}{2b} \sum_{t=0}^{2b} \sum_{\Gamma(\vec{\sigma}; t)} \sum_{\vec{\pi} \in \Gamma(\vec{\sigma}; t)} \int \frac{d^4 p^{(\pi_1)} \dots d^4 p^{(\pi_t)}}{N^{t-1}} \\
&\quad \delta^{(4)}(p^{(\pi_1)} + \dots + p^{(\pi_t)}) \cdot \int \frac{d^4 r}{N} i \int \frac{d^4 l}{N} \text{tr}_{I,D} \\
&\quad \left\{ \mathcal{A}(p^{(\pi_1)}) \prod_{k=\pi_1+1}^{\pi_2-1} \left(\mathcal{D}(l; m) \cdot (-\not{r} + \sum_{\substack{v=2 \\ v \in \vec{\pi}}}^k \not{p}^{(v)}) \right) \mathcal{D}(l; m) \right. \\
&\quad \cdot \mathcal{A}(p^{(\pi_2)}) \prod_{k=\pi_2+1}^{\pi_3-1} \left(\mathcal{D}(l; m) \cdot (-\not{r} + \sum_{\substack{v=2 \\ v \in \vec{\pi}}}^k \not{p}^{(v)}) \right) \mathcal{D}(l; m) \dots \\
&\quad \left. \mathcal{A}(p^{(\pi_t)}) \prod_{k=\pi_t+1}^{\pi_1-1} \left(\mathcal{D}(l; m) \cdot (-\not{r} + \sum_{\substack{v=2 \\ v \in \vec{\pi}}}^k \not{p}^{(v)}) \right) \mathcal{D}(l; m) \right\} \Big|_{PV}
\end{aligned} \tag{F.17}$$

Wir identifizieren stets π_u, π_v , wenn sie in derselben Restklasse $\text{mod}(2b)$ liegen. Die Integrale über die äußeren Impulse $p^{(s)}$ ($s \notin \vec{\pi}$) konnten sofort erledigt werden, weil im Integranden der Distributionsfaktor $\prod_{s \notin \vec{\pi}} \delta^{(4)}(p^{(s)})$ vorlag.

Repräsentanten ein- und derselben Klasse $\Gamma(\vec{\sigma}; t)$, welche $n_{(\vec{\sigma}; t)}$ verschiedene Elemente besitzt^[28], liefern stets auch gleiche Amplituden zu $S_{(2b)}(A^\mu)$: denn bei dem Produkt, das sich zwischen aufeinanderfolgenden Feldvariablen $\mathcal{A}(p^{(\pi_k)})$, $\mathcal{A}(p^{(\pi_{k+1})})$ befindet, hat man es mit dem $(\pi_{(k+1)} - \pi_{(k)})$ -ten Glied der geometrischen Reihe

$$G(l, u; m; \epsilon) = \frac{1}{\not{l} + \not{u} \cdot \epsilon - m} \quad u = \left\{ \not{r} - \sum_{\substack{v=2 \\ v \in \vec{\pi}}}^{\pi_k} \not{p}^{(v)} \right\} \tag{F.18}$$

zu tun, die um den Mittelpunkt $\epsilon = 0$ entwickelt wird. Der Übergang zu einem anderen Repräsentanten $\in \Gamma(\vec{\sigma}; t)$ kann durch eine geeignete Verschiebung des Schleifenimpulses l_α begleitet von einer Translation der Indizes π_α immer vollzogen werden. Die angedeutete Regularisierung $|_{PV}$ verhilft dem Schleifenintegral dabei zur erforderlichen absoluten Konvergenz. Des weiteren ist es möglich, mit der Substitution $l \mapsto (l - \epsilon \cdot r)$ noch die scheinbare Abhängigkeit des Integranden von r loszuwerden. Dies verdeutlicht, daß (15) aufgrund der darin stattfindenden Verjüngung mit dem Tensor F tatsächlich keine "freistehenden" partiellen Ableitungen behält.

Der Summand $t = 0$ von (17) ist besonders einfach und verschwindet sogar, wie eine erneute l -Translation zeigt:

$$N \delta^{(4)}(0) \int \frac{d^4 r}{N} i \int \frac{d^4 l}{N} \text{tr}_{I,D} \left\{ (\mathcal{D}(l; m) (-\not{r}))^{2b} \right\} \Big|_{PV} =$$

^[28] $n_{(\vec{\sigma}; t)}$ gibt gleichzeitig die Periodenlänge von $\vec{\sigma}$ bezüglich einer allgemeinen Indexerhöhung um jeweils $(+1)$ an, wenn man zyklische Äquivalenz voraussetzt.

$$i \cdot N \delta^{(4)}(0) \int d^4 r \int \frac{d^4 l}{N} \text{tr}_{I,D} \{G(l, r; m; \epsilon)(-r)\}_{|_{PV}} \Big|_{\epsilon^{2b-1}\text{-Term}} \Big|_{\epsilon=1} = 0$$

Mit Hilfe der eben dargestellten Überlegungen können wir den Ausdruck (17) für die Beiträge der Skalendimension (2b) spürbar vereinfachen:

$$\begin{aligned} S_{(2b)}(A^\mu) &= \frac{1}{2b} \sum_{t=1}^{2b} \frac{2b}{t} \int \frac{d^4 p^{(1)} \dots d^4 p^{(t)}}{N^{t-1}} \delta^{(4)}(p^{(1)} + \dots + p^{(t)}) \\ &\quad \cdot i \int \frac{d^4 l}{N} \text{tr}_{I,D} \left\{ \mathcal{A}(p^{(1)}) G(l, 0; m; \epsilon) \cdot \mathcal{A}(p^{(2)}) G(l, -p^{(2)}; m; \epsilon) \dots \right. \\ &\quad \left. \mathcal{A}(p^{(t)}) G(l, p^{(1)}; m; \epsilon) \right\}_{|_{PV}} \Big|_{\epsilon^{(2b-t)}\text{-Term}} \Big|_{\epsilon=1} \end{aligned} \quad (F.19)$$

Der kombinatorische Vorfaktor $\left(\frac{2b}{t}\right) \geq 1$ entsteht folgendermaßen: Den Klassen $\Gamma_{(\vec{\sigma}; t)}$, deren Repräsentanten die Periodenzahl $\left(\frac{2b}{n(\vec{\sigma}, t)}\right)$ aufweisen, entspricht eine Einteilung der Beiträge zu (19), welche durch die ϵ -Reihenentwicklung entstehen. Die unveränderte Periodenzahl lautet jetzt $\left(\frac{t}{m(\vec{\sigma}, t)}\right)$, wobei der Nenner den Umfang der neuen Klasse $\tilde{\Gamma}_{(\vec{\sigma}; t)}$ bezeichnet, deren Vertreter wieder zu gleichen Amplituden führen. Also:

$$n(\sigma; t) = m(\sigma; t) \left(\frac{2b}{t}\right) \quad (F.20)$$

Anhand von (19) überzeugt man sich leicht, daß $S_{(2)}(A^\mu)$ wegfällt.

Wenden wir uns nun der Reihe zu, welche die Wechselwirkungen (15) sämtlicher geradzahlgiger Skalendimensionen umfaßt, so finden wir (vgl. (9))

$$\begin{aligned} \sum_{b=1}^{\infty} S_{(2b)}(A^\mu) &= i \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t} \int \frac{d^4 p^{(1)} \dots d^4 p^{(t)}}{N^{t-1}} \delta^{(4)}(p^{(1)} + \dots + p^{(t)}) \\ &\quad \int \frac{d^4 l}{N} \sum_{\beta=0}^{\infty} \left(\text{tr}_{I,D} \{ \text{"wie zuvor"} \}_{|_{PV}} \Big|_{\epsilon^\beta\text{-Term}} \Big|_{\epsilon=1} \right) \\ &= i \sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{1}{t}\right) \text{Tr} \left\{ \left(\frac{1}{(i\hat{\partial} - m)} \mathcal{A} \right)^t \right\}_{|_{PV}} \\ &= -i \left(\text{Tr} \ln \left\{ 1 - \frac{1}{(i\hat{\partial} - m)} \mathcal{A} \right\} \right)_{|_{PV}} = S_{\text{YM}}(A^\mu) \end{aligned} \quad (F.21)$$

Dabei haben wir die (b, t) -Doppelreihe umgeordnet und die Bedingung absoluter Reihen-Konvergenz als erfüllt betrachtet. Außerdem wurden für ungeradzahliges t noch die ϵ -Entwicklungsglieder nullter Ordnung hinzugefügt, was keinen Einfluß auf die induzierten Wechselwirkungen besitzt.

Unser Beweisziel ist damit erreicht: wenn man die Substitution (14) im Funktional (12), welches nur ein konstantes Yang-Mills-Feld A^μ gestattet, formal vornimmt, erhält man schon vollständig die induzierten 1-Schleifen-Wechselwirkungen der Skalendimension (2b), auch dann, wenn sich A^μ als Raum-Zeit-abhängig herausstellt.

Eine vom eben beschriebenen Weg abweichende, eher indirekte Beweisführung sucht ein zweites eichinvariantes Funktional $\tilde{S}_{(2b)}(A^\mu)$ mit der Eigenschaft, daß

$$\tilde{S}_{(2b)}(A^\mu) \Big|_{A_\mu = \text{const}} = S_{(2b)}(A^\mu) \Big|_{A_\mu = \text{const}}$$

vorliegt. Die Differenz beider Funktionale besteht daher nur aus Termen, die mindestens eine (höhere) Ableitung des Yang-Mills-Feldes A^μ beinhalten. Untersucht man nun, wie eine beliebige Eichvariation (8) $(\tilde{S}_{(2b)} - S_{(2b)})$ beeinflusst, so stellt sich heraus, daß nur dann Invarianz eintritt, wenn beide Funktionale identisch sind. Deshalb ist (15) eindeutig.

Natürlich kann man den Ausdruck (15) auch verwenden, wenn A^μ eine $U(1)$ -Eichkonnektion darstellt. Die Spur über den inneren Isospin-Index wird dann überflüssig.

Ich scheiterte bisher am Nachweis, daß das Funktional (15) allein mit Hilfe des Feldstärkensors $F_{\mu\nu} = -i[D_\mu, D_\nu]$ bzw. dessen I -kovarianter Ableitungen $[D_\mu, F_{\nu\rho}]$ etc. konstruiert werden kann. Diese Vermutung wird durch den Beweis von (15) nahegelegt, wonach keine partiellen Ableitungsoperatoren ∂_μ übrigbleiben, die an sämtlichen Faktoren A^μ vorbei operieren.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] H.-P. Dürr: *Nuovo Cimento* **73 A** (1983) 165
"General space-time covariance in a pure spinor theory"
- [2] H. Saller: *Nuovo Cimento* **71 A** (1982) 17 "Dynamical unification of fermions and gauge bosons for internal symmetry and gravity"
- [3] D. Amati, R. Barbieri, A. C. Davis, G. Veneziano: *Phys. Lett.* **102 B** (1981) 408
"Dynamical gauge bosons from fundamental fermions"
- [4] D. Amati, G. Veneziano: *Nucl. Phys.* **B 204** (1982) 451
"A unified gauge and gravity theory with only matter fields"
- [5] C. Itzykson, J. -B. Zuber: "Quantum Field Theory",
McGraw-Hill, New York, 1980
- [6] H.-P. Dürr: *Nuovo Cimento* **22 A** (1974) 386 "Conservation laws in Lagrangian field theories with higher-order derivatives"
- [7] W. Heisenberg: "Einführung in die einheitliche Feldtheorie der Elementarteilchen", Hirzel-Verlag, Stuttgart, 1967
- [8] T. D. Lee, G. C. Wick: *Nucl. Phys.* **B 9** (1969) 209
"Negative metric and the unitarity of the S-matrix"
- [9] N. Bogoliubov, D. Shirkov: "Introduction to the Theory of Quantized Fields",
Interscience, New York, 1959
- [10] W. Pauli, F. Villars: *Rev. Mod. Phys.* **21** (1949) 434
"On the invariant regularization in relativistic quantum theory"
- [11] A. Pais, G. E. Uhlenbeck: *Phys. Rev.* **79** (1950) 145
"On field theories with non-localized action"
- [12] M. Abramowitz, I. Stegun: "Handbook of Mathematical Functions",
National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series · 55 (1972)
- [13] G. Konisi, W. Takahasi: *Prog. Theor. Phys.* **61** (1979) 1808
"A detailed investigation of fermion collective motions"
- [14] G.'t Hooft: *Nucl. Phys.* **B 33** (1971) 173
"Renormalization of massless Yang-Mills fields"
- [15] W. Heisenberg, H. Euler: *Zeits. f. Physik* **98** (1936) 714
"Folgerungen aus der Diracschen Theorie des Positrons"

- [16] Y. Nambu, G. Jona-Lasinio: *Phys. Rev.* **122** (1961) 345
“Dynamical model of elementary particles based on
an analogy with superconductivity. I”
- [17] E. Witten: *Nucl. Phys.* **B 149** (1979) 285
“Instantons, the quark model, and the $1/N$ expansion”
- [18] H. Saller: *Nuovo Cimento* **24 A** (1974) 391
“Gauge fields as bound states of subcanonical fermion fields”

Danksagung

Herr Professor H.-P. Dürr hat in zahlreichen Gesprächen dazu beigetragen, daß ich verschiedene offenen Fragen zu den von ihm bearbeiteten subkanonischen Modellen beantworten konnte. Dafür möchte ich mich bei ihm bedanken. Zu Beginn meiner Beschäftigung mit effektiven Feldtheorien hat Herr Dr. H. Saller mir einen Überblick der bisher gewonnenen Ergebnisse vermittelt. Diese Diskussionen haben mir geholfen, grundlegende Kenntnisse für die vorliegende Arbeit zu erwerben. Die angenehme (wissenschaftliche) Atmosphäre, die am Werner-Heisenberg-Institut zu spüren ist, gefiel mir sehr.

Die Max-Planck-Gesellschaft hat mich mehrere Jahre durch Stipendien gefördert und so gute äußere Voraussetzungen bei meiner Dissertation geschaffen. Ebenso danke ich meinen Eltern für die vielfältige Unterstützung, die sie mir stets gewährt haben.

Lebenslauf

Name: Jürgen Lauer
Geburtsdatum: 4. 5. 1958
Geburtsort: Coburg
Eltern: Studiendirektor Herbert Lauer und
seine Ehefrau Gertraude Lauer

1964-1968: Rückertschule, Coburg
1968-1977: Gymnasium Casimirianum, Coburg
Mai 1977: Abitur
Stipendium der Bayerischen Begabtenförderung

Anfang 1978: Aufnahme in die Studienstiftung des
Deutschen Volkes

1977-1982: Studium der Physik in Erlangen
1979: Vorprüfung
Frühjahr 1981: Diplomarbeit bei Professor Dr. H. Ruder
Thema: "Bremsstrahlung in hohen Magnetfeldern"

Juli 1982: Diplomprüfung mit der Durchschnittsnote 1,2
1982-1983: Wissenschaftlicher Angestellter
bei Professor Ruder in Tübingen

Ab Februar 1983: Max-Planck-Institut für
Physik und Astrophysik, München
Beginn der Doktorarbeit
Betreuer: Professor H.-P. Dürr
Thema: Effektive Dynamik eines aus Fermionen
zusammengesetzten Eichfelds

